Partie A | $g(x) = (x-1)\cdot e^{-x} + 2$

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} [\underbrace{(x-1)}_{-\infty}\cdot \underbrace{e^{-x}}_{(+\infty)} + 2] = \underline{\underline{-\infty}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\underbrace{(x-1)}_{+\infty}\cdot \underbrace{e^{-x}}_{0} + 2] \overset{F.I.}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} (\underbrace{x\cdot e^{-x}}_{0} - \underbrace{e^{-x}}_{0} + \underbrace{2}_{2}) = \underline{\underline{2}}$

0 car $\lim\limits_{x \to +\infty} x\cdot e^{-x} = 0$ selon formulaire

2) $\forall x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 1\cdot e^{-x} + (x-1)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x} - e^{-x}(x-1) = e^{-x}\cdot(1-x+1) =$
$= \underline{e^{-x}\cdot(2-x)}$

→ points nuls : $2-x=0$; $\underline{x=2}$; $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
e^{-x}		+		+	
$2-x$		+	0	$-$	
$g'(x)$		+		$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(2)$	↘	2

$g(2) = (2-1)\cdot e^{-2} + 2 =$
$= e^{-2} + 2 = \underline{\underline{2 + \frac{1}{e^2}}} \approx 2{,}14$

3) La fonction g ne change pas de signe sur $[2 ; +\infty[$, donc $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[2 ; +\infty[$.

Sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$, fonction g :
- est dérivable donc continue
- est strictement croissante
- change de signe

} donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty ; 2]$.

$g(-1) = (-1-1)\cdot e^{1} + 2 = -2e + 2 \doteq \underline{-3{,}4}$
$g(0) = (0-1)\cdot e^{0} + 2 = -1 + 2 = \underline{1}$

} $g(-1) < 0 < g(0)$, alors $-1 < \alpha < 0$, d'où $\underline{\underline{\alpha \in [-1 ; 0]}}$

4)

x	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$
$g(x)$	$-$	+	+

→ $g(-0{,}4) < 0 < g(-0{,}3)$
alors $-0{,}4 < \alpha < -0{,}3$ d'où $\underline{\underline{\alpha \in [-0{,}4 ; -0{,}3]}}$

5)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	+	

→ négatif pour $x \in]-\infty ; \alpha[$
positif pour $x \in]\alpha ; +\infty[$
nul pour $x = \alpha$

Partie B) $f(x) = 2x + 1 - x\cdot e^{-x}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1-x\cdot e^{-x}) \overset{F.I.}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} [x\cdot(2-e^{-x})+1] = \underline{\underline{+\infty}}$

$2x+1 \to -\infty$; $x\cdot e^{-x} \to -[-\infty\cdot(+\infty)]$; $x\cdot(2-e^{-x}) \to -\infty\cdot(-\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1-x\cdot e^{-x}) = \underline{\underline{+\infty}}$

$2x+1 \to +\infty$; $x\cdot e^{-x} \to 0$ selon formulaire

2) $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2 - [1\cdot e^{-x} + x\cdot e^{-x}\cdot(-1)] = 2 - e^{-x} + x\cdot e^{-x} =$

$= \underline{e^{-x}\cdot(x-1)+2 = g(x)}$ c.q.f.d.

3)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)=g(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$f(\alpha)$: $f(-0{,}4) \doteq 0{,}79$
$f(-0{,}3) \doteq 0{,}80$

$f(\alpha) \doteq \underline{0{,}8}$

4) (D) est une asymptote oblique à (Cf) au voisinage de $+\infty$ ssi $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (D)] = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} [2x+1-x\cdot e^{-x} - (2x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} [-x\cdot e^{-x}] = \underline{\underline{0}}$ (selon formulaire)

c.q.f.d.

5) la position relative de (D) et (Cf) dépend du signe de la différence $d(x)$ de $f(x)$ et (D) :

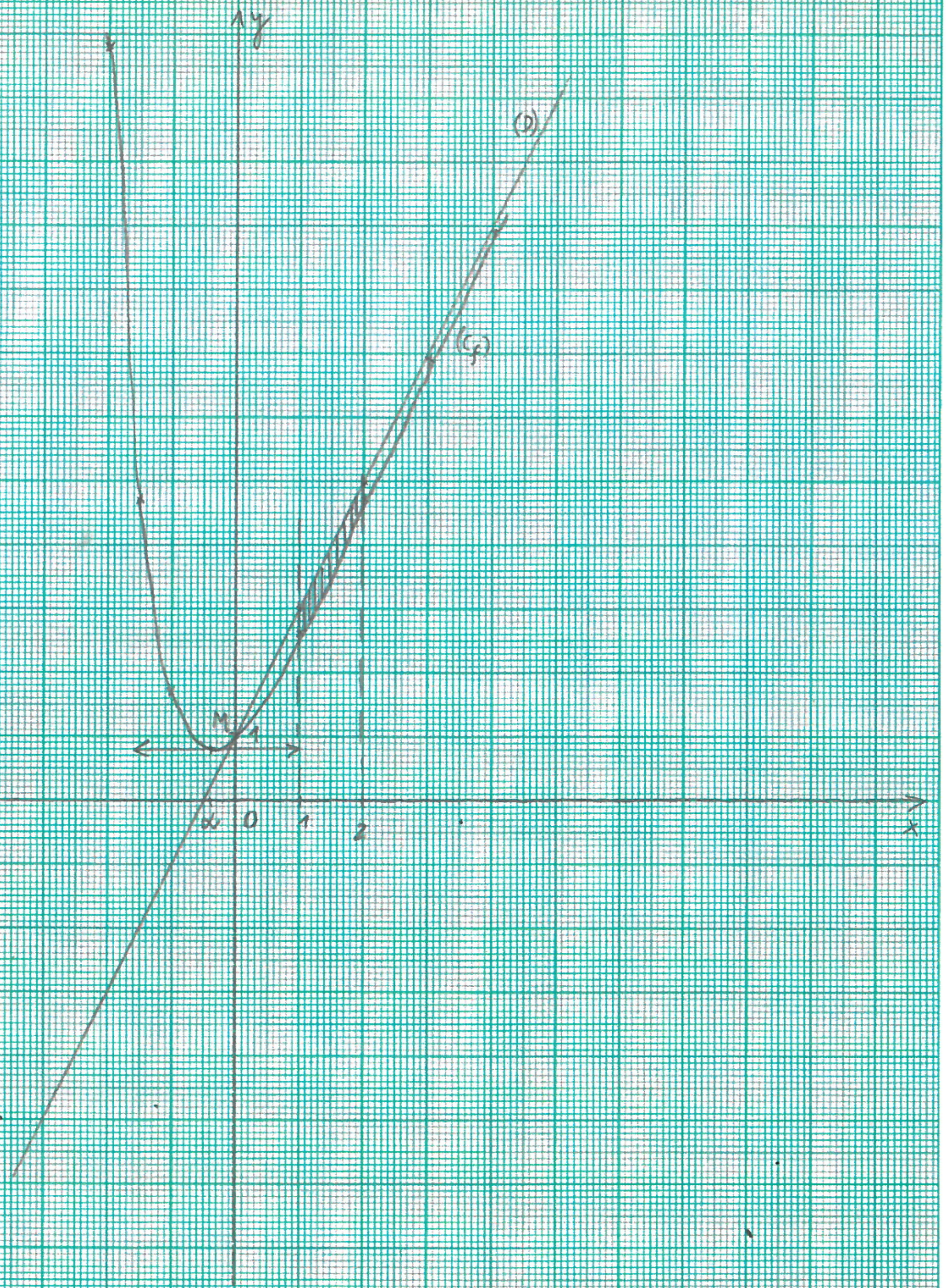
$d(x) = f(x) - (D) = \underline{-x\cdot e^{-x}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$d(x)$		$+$	0	$-$	

Donc la courbe (Cf) se trouve au-dessus de (D) pour $x \in]-\infty;0[$

(Cf) ... au-dessous de (D) pour $x \in]0;+\infty[$

et (Cf) et (D) se coupent en $x=0$.


y
(D)
(Cf)
M
1
α
0
1
2
x

Exercice n°2

$A(2\,;-1\,;3)$, $B(1\,;1\,;3)$, $C(5\,;2\,;\frac{1}{2})$

$D(-8\,;-6\,;-7)$, $E(-9\,;-4\,;-7)$

$(\pi) : -10x - 5y - 10z = 180$, $(ABC) : 2x + y + 2z - 9 = 0$

Affirmation 1 : $B(1\,;1\,;3)$, $D(-8\,;-6\,;-7)$, $E(-9\,;-4\,;-7)$

$\overrightarrow{BD}(-9\,;-7\,;-10)$

$\overrightarrow{BE}(-10\,;-5\,;-10) = -5(2\,;1,2)$

$\vec{n} = \overrightarrow{BD} \wedge \frac{1}{-5}\overrightarrow{BE} = (-4\,;-2\,;5)$

$$\begin{array}{cccc} -7 & -10 & -9 & -7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

$(BDE) : ax + by + cz + d = 0$

$-4x - 2y + 5z + d = 0$

$B \in (BDE) : -4 - 2 + 15 + d = 0$

$d = -9$

$(BDE) : -4x - 2y + 5z - 9 = 0$

$-4x - 2y + 5z = 9$

$\underline{(BDE) : 4x + 2y - 5z = -9}$

$\boxed{\text{FAUX}}$

Affirmation 2 : A, B, E et C ne sont pas coplanaires ssi $E \notin (ABC)$

$2(-9) + (-4) + 2(-7) - 9 = -45 \neq 0$

alors $E \notin (ABC)$ et A, B, C, E ne sont pas coplanaires.

$\boxed{\text{FAUX}}$

Affirmation 3 | (ABC) : $\vec{n}(2 ; 1 ; 2)$
(π) : $\vec{n_2}(-10; -5; -10)$

$-5\ \vec{n} = (-10 ; -5 ; -10) = \vec{n_2}$

Comme $\vec{n_2} = -5 \cdot \vec{n}$, les plans (ABC) et (π) sont <u>parallèles</u>

$\boxed{\text{FAUX}}$

Affirmation 4 | : (AD) ... $\vec{u} = \vec{AD}(-10, -5, -10) = -5 \cdot (2 ; 1 ; 2)$

(AD) : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

↓
point A

$\boxed{\text{VRAI}}$

Affirmation 5 | D est le projeté orthogonal de A sur (π)
ssi $D \in (\pi)$ et $\vec{AD} \perp (\pi)$

$\vec{AD}(-10 ; -5 ; -10)$ $\quad D \overset{?}{\in} (\pi)$ $\quad -10 \cdot (-8) - 5(-6) - 10 \cdot (-7) \overset{?}{=} 180$
$D(-8 ; -6 ; -7)$ $\quad 80 + 30 + 70 \overset{?}{=} 180$
$180 = 180$ ✓

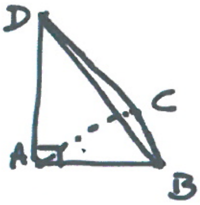
→ donc $D \in (\pi)$

$\left.\begin{matrix} \vec{AD}(-10 ; -5 ; -10) \\ \vec{n_2}(-10 ; -5 ; -10) \end{matrix}\right\} \vec{AD} = \vec{n_2}$ donc $\vec{AD} \perp (\pi)$

$\boxed{\text{VRAI}}$

et on peut conclure que D est le projeté orthogonal de A sur (π)

Affirmation 6 | volume de ABCD



$$V = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{ABC} \cdot \|\vec{AD}\| = \frac{1}{6} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \cdot \|\vec{AD}\|$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{25 + \frac{25}{4} + 25} \cdot \sqrt{100 + 25 + 100}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{225}{4}} \cdot \sqrt{225} = \frac{1}{\cancel{6}_{2}} \cdot \frac{\cancel{15}^{5}}{2} \cdot 15 = \frac{5 \cdot 15}{4}$$

$$= \frac{75}{4} \text{ unités au cube}$$

$$= \frac{75}{4} \cdot \underbrace{8 \text{ cm}^3}_{(2\text{ cm})^3} = 75 \cdot 2 \text{ cm}^3 = \underline{\underline{150 \text{ cm}^3}}$$

$\boxed{\text{FAUX}}$

Ex 3

Partie A $P(z) : z^3 + (8i - 4\sqrt{3})z^2 + (16 - 32i\sqrt{3})\cdot z + 128i$

1) $P(-8i) = (-8i)^3 + (8i - 4\sqrt{3})\cdot(-8i)^2 + (16 - 32i\sqrt{3})(-8i) + 128i =$

$= -512\cdot(-i) + (8i - 4\sqrt{3})\cdot 64(-1) - 16\cdot 8i + 32\cdot 8(-1)\sqrt{3} + 128i =$

$= \cancel{512}i - \cancel{512}i + 256\sqrt{3} - 128i - 256\sqrt{3} + 128i = 0$

$-8i$ est une racine de $P(z)$
donc on peut factoriser le polynôme $P(z)$ par $z+8i$

2) $(z+8i)\cdot(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz + 8az^2i + 8bzi + 8ci$

$= az^3 + (b+8ai)z^2 + (c+8bi)z + 8ci = P(z)$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$

$b + 8ai = 8i - 4\sqrt{3} \rightarrow b + 8i = 8i - 4\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{b = -4\sqrt{3}}$

$c + 8bi = 16 - 32i\sqrt{3} \rightarrow c - 32\sqrt{3}\,i = 16 - 32i\sqrt{3} \Rightarrow \underline{c=16}$

$8ci = 128i \Rightarrow \boxed{c=16}$

3) $P(z) = 0 \iff (z+8i)\cdot(z^2 - 4\sqrt{3}\cdot z + 16) = 0$

$\iff z + 8i = 0 \quad \vee \quad z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

$\underline{z_1 = -8i}$ $\quad \Delta = 16\cdot 3 - 4\cdot 16 = -16$

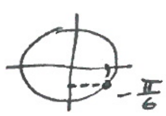
$\sqrt{\Delta} = i\cdot 4$

$z_{2,3} = \dfrac{4\sqrt{3} \pm 4i}{2} = \underline{2\sqrt{3} \pm 2i}$

$\underline{\underline{S = \{-8i \;;\; 2\sqrt{3} - 2i \;;\; 2\sqrt{3} + 2i\}}}$

Partie B $z_A = 2\sqrt{3} - 2i \quad z_B = 2\sqrt{3} + 2i \quad z_C = -8i$

1) a) z_A : $|z_A| = \sqrt{4\cdot 3 + 4} = 4 \quad \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} \quad \sin\alpha = \dfrac{-2}{4}$

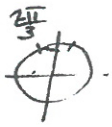


$\alpha = -\dfrac{\pi}{6} \quad \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$\underline{\underline{z_A = 4\cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}}}$

z_B est le nombre conjugué de z_A, donc $\arg(z_B) = -\arg(z_A)$
et $|z_B| = |z_A|$

$\underline{\underline{z_B = 4\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}}}$

2) $C \xrightarrow{r} D$ 

$r : z' = e^{i\theta}(z - z_O) + z_O$

$z_D = e^{i\frac{2\pi}{3}}\cdot(z_C - z_O) + z_O = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot(-8i) = \frac{8}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8$

$\underline{\underline{z_D = 4\sqrt{3} + 4i}}$ c.q.f.d.

3) $B \xrightarrow{h} D$

$h : z' = k\cdot(z - z_O) + z_O$

$z_D = k\cdot(z_B - 0) + 0$

$4\sqrt{3} + 4i = k\cdot(2\sqrt{3} + 2i)$

$\frac{4\sqrt{3} + 4i}{2\sqrt{3} + 2i} = k \Rightarrow \underline{\underline{k = 2}}$

4) $B \xrightarrow{s} F$

$\vec{AB}$ ... $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = \underline{4i}$

$s : z' = z + z_{\vec{u}}$

$z_F = z_B + z_{\vec{AB}} = 2\sqrt{3} + 2i + 4i$

$\underline{\underline{z_F = 2\sqrt{3} + 6i}}$

5) a) $\frac{z_O - z_A}{z_D - z_A} = \frac{0 - 2\sqrt{3} + 2i}{4\sqrt{3} + 4i - 2\sqrt{3} + 2i} = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{2\sqrt{3} + 6i} = \frac{\cancel{2}(-\sqrt{3} + i)}{\cancel{2}(\sqrt{3} + 3i)}\cdot\frac{(\sqrt{3} - 3i)}{(\sqrt{3} - 3i)} =$

$= \frac{-3 + 3\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 3}{3 - 3\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i + 9} = \frac{4\sqrt{3}\,i}{12} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}i}$

b) $\arg\left(\frac{z_O - z_A}{z_D - z_A}\right) = (\vec{AD}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{2}$ (car $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ est un nombre imaginaire pur et $\mathrm{Im}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) > 0$)

donc ΔOAD est <u>rectangle en A</u>

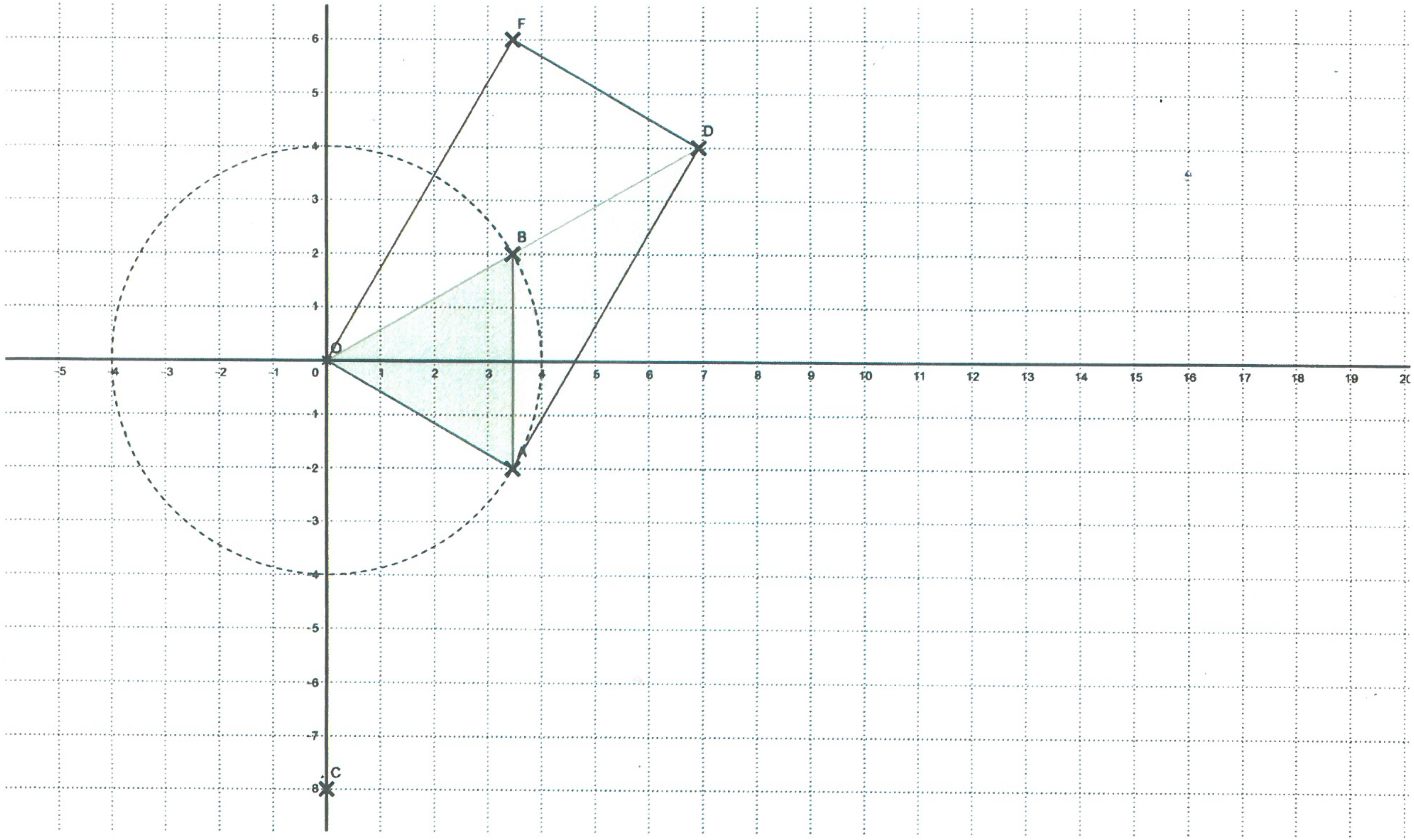
c) $\vec{OA}$: $z_A - z_O = \underline{2\sqrt{3} - 2i}$

$\vec{FD}$: $z_D - z_F = 4\sqrt{3} + 4i - 2\sqrt{3} - 6i = \underline{2\sqrt{3} - 2i}$ $\Big\}$ $\vec{OA} = \vec{FD}$

$\Rightarrow$ OADF est un parallélogramme avec $(AO) \perp (AD)$

alors c'est <u>un rectangle</u>.

Nombres complexes 2020



Bac blanc 2022
Ex. 4 – corrigé

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{u_n + 2} \end{cases}$$

1a) $u_0 = 0$

$u_1 = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$

$$u_1 = 2 - \frac{3}{\frac{1}{2}+2} = 2 - \frac{3}{\frac{5}{2}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

$$u_2 = 2 - \frac{3}{\frac{4}{5}+2} = 2 - \frac{3}{\frac{14}{5}} = 2 - \frac{15}{14} = \frac{13}{14}$$

b) $$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{3}{u_n+2} - u_n = \frac{2u_n + 4 - 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 1}{u_n + 2} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2}$$

comme $0 \leq u_n < 1$, on a : $1 - u_n > 0$
$1 + u_n > 0$
$u_n + 2 > 0$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
et (u_n) est strictement croissante

c) $u_n < 1$ donc majorée par 1 et
(u_n) est strict. croissante donc (u_n) converge

2° $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{2 - \frac{3}{u_n+2} - 1}{2 - \frac{3}{u_n+2} + 1} = \dfrac{1 - \frac{3}{u_n+2}}{3 - \frac{3}{u_n+2}}$

$$= \dfrac{\frac{u_n+2-3}{u_n+2}}{\frac{3u_n+6-3}{u_n+2}} = \dfrac{u_n - 1}{3u_n + 3}$$

$$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\frac{u_n - 1}{3u_n+3}}{\frac{u_n-1}{(u_n+1)}} = \dfrac{u_n+1}{3(u_n+1)} = \dfrac{1}{3} = q$$

$$v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = -1$$

b) $v_n = v_0 \cdot q^n = -1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $|q| < 1$

c) $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ $/ \cdot (u_n + 1)$

$v_n u_n + v_n = u_n - 1$

$v_n u_n - u_n = -1 - v_n$

$u_n (v_n - 1) = -1 - v_n$

$u_n = \dfrac{-1 - v_n}{v_n - 1} = \dfrac{-1 \cdot (1 + v_n)}{-1 \cdot (1 - v_n)} = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$ c.q.f.c

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n} = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$