Sujet B

Exercice 1

$$f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} \qquad D_f = [0;+\infty[$$

Partie A

$$g(x) = e^x(x-2)-1 \qquad D_g = [0;+\infty[$$

1) Limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

2) $\forall x \geq 0$, $g'(x) = e^x.(x-2)+e^x.1 = e^x(x-1)$

Tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-1	$-$	0	$+$	
Variations de g	-3	$\searrow$	$-e-1$	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall x \geq 0$, $e^x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x-1$

$g(0) = 1(0-2)-1 = -3$

$g(1) = e(-1)-1 = -e-1$

3) • $g([0;1]) = [-e-1;-3]$

$0 \notin [-e-1;-3]$ donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution dans $[0;1]$.

• Sur $[1;+\infty[$, g est dérivable donc continue et strictement croissante. $g(2) = -1 < 0$; $g(3) = e^3-1 > 0$

Donc d'après le théorème de la bijection l'équation $g(x)=0$ admet une solutions unique dans $[2;3]$.

$g(2,12) \approx -0,0002 < 0$; $g(2,13) \approx 0,0939$

Donc $2,12 < \alpha < 2,13$

4) Tableau de signe de $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x+x} = \dfrac{\dfrac{e^x+1}{e^x}}{\dfrac{e^x+x}{e^x}} = \dfrac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}$; $x \in [0;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 1+xe^{-x} = 1$

$\Bigg\} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ signifie que (C_f) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 1$.

3) Pour étudier la position relative de (C_f) et $(\mathcal{D})$, on étudie le signe de $f(x) - 1$ sur $[0;+\infty[$

$f(x) - 1 = \dfrac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \dfrac{e^x+1-e^x-x}{e^x+x} = \dfrac{1-x}{e^x+x}$

Sur $[0;+\infty[$, $e^x+x>0$ donc $f(x)-1$ est du signe de $1-x$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f(x)-1$		$+$	0	$-$	

D'où (C_f) est au-dessus de $(\mathcal{D})$ sur $[0;1[$, en 1, C_f coupe $(\mathcal{D})$ et sur $]1;+\infty[$, (C) est en-dessous de $(\mathcal{D})$.

4) $f'(x) = \dfrac{(e^x+1)'\cdot(e^x+x) - (e^x+1)(e^x+x)'}{(e^x+x)^2} = \dfrac{e^{2x}+xe^x-(e^x+1)^2}{(e^x+x)^2} =$

$= \dfrac{e^{2x}+xe^x-e^{2x}-2e^x-1}{(e^x+x)^2} = \dfrac{(x-2)e^x-1}{(e^x+x)^2} = \dfrac{g(x)}{(e^x+x)^2}$

5) <u>Tableau de variations</u>

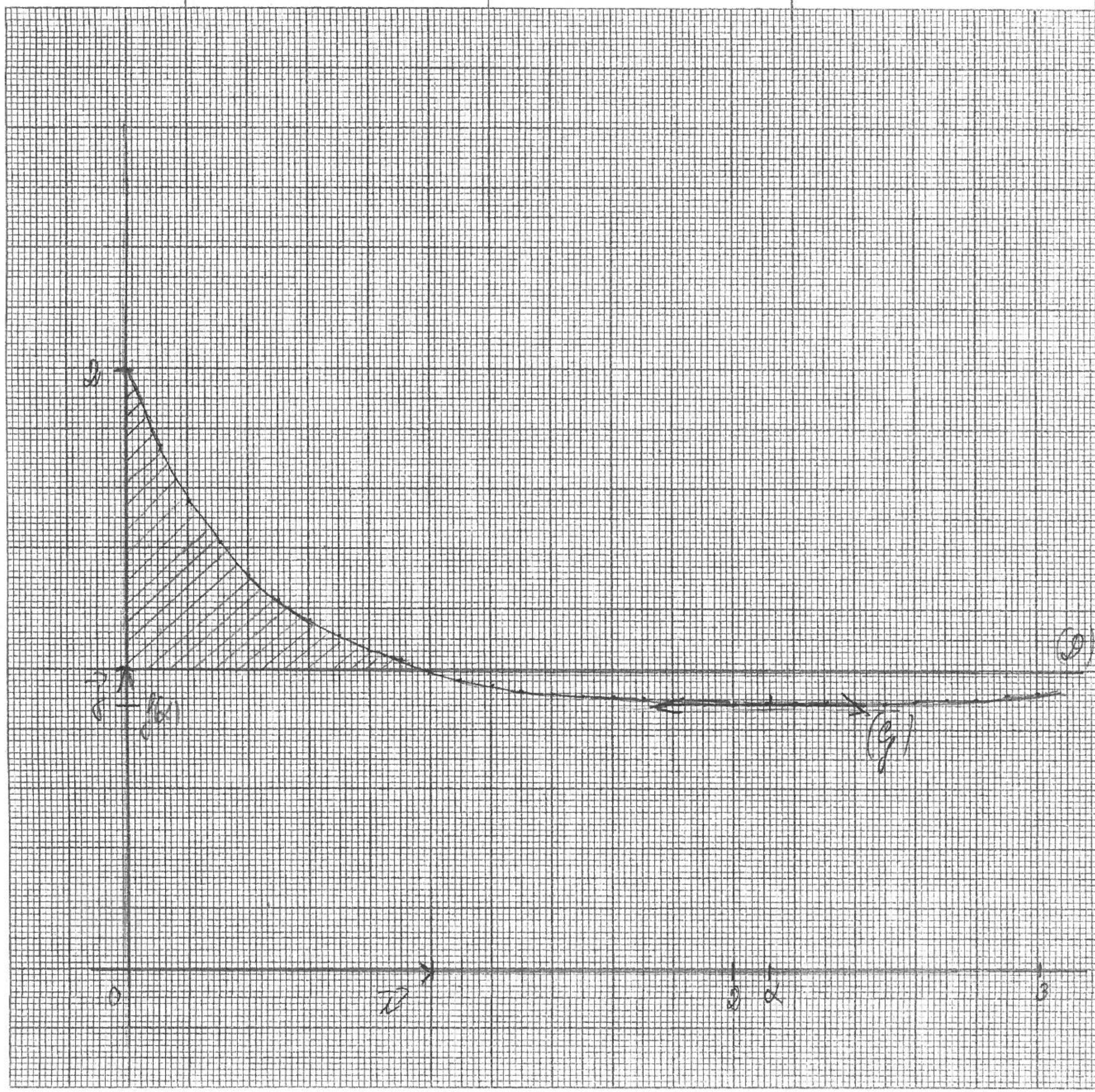
Sur $[0;+\infty[$, $(e^x+x)^2>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1

$f(0)=\dfrac{1+1}{1+0}=2$

6) $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}\approx 0{,}89$

exercice 1 Partie B 7) Partie C 1)



Exercice 2

$A(2;4;1)$; $B(0;4;-3)$; $C(3;1;-3)$; $D(1;0;-2)$; $E(3;2;-1)$; $I(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5})$

1) $2x+2y-z-11=0$ est une équation du plan (ABC).

$A \overset{?}{\in} (ABC)$: $2\cdot2+2\cdot4-1-11=12-12=0$ $\quad A\in(ABC)$

$B \overset{?}{\in} (ABC)$: $2\cdot0+2\cdot4+3-11=8-8=0$ $\quad B\in(ABC)$

$C \overset{?}{\in} (ABC)$: $2\cdot3+2\cdot1+3-11=11-11=0$ $\quad C\in(ABC)$

} vraie

2) E est le projeté orthogonal de D sur (ABC)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED} \perp (ABC)$ et $E\in(ABC)$

$\vec{n}(2;2;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$\overrightarrow{ED}(-2;-2;-1)$ $\Rightarrow$ les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{ED}$ ne sont pas colinéaires

$\Rightarrow \overrightarrow{ED}$ n'est pas normal au plan (ABC). $\Rightarrow$ faux

3) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=4+0-4=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ $\Rightarrow$ vraie

4) $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (CD)

$M(x;y;z)\in(CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}=k\cdot\overrightarrow{CD}$; $k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-2k \\ y-1=-1k \\ z+3=k \end{cases}$; $k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2k \\ y=1-k \\ z=-3+k \end{cases}$; $k\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} -1+2t=3-2k \\ -1+t=1-k \\ 1-t=-3+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2-k \\ t=2-k \\ t=4-k \end{cases}$ $\Rightarrow$ faux

5) $I\in(AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{AI}(-\frac{7}{5};0;-\frac{14}{5})$ $\quad \overrightarrow{AB}(-2;0;-4) \Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{7}{10}\cdot\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ vrai

Partie B

1) Déterminons une représentation de la droite (Δ) passant par le point D et perpendiculaire au plan (ABC).

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}3-2\\1-4\\-3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC}$: $\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\-(8+4)\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\-12\\6\end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = -2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2) Déterminons les coordonnées du point d'intersection K de la droite (Δ) avec le plan (ABC).

$(ABC) : 2x + 2y - z - 11 = 0$

$K\begin{pmatrix}1+2t\\2t\\-2-t\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} K \in (ABC) &\Leftrightarrow 2(1+2t) + 2(2t) - (-2-t) - 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + 4t + 4t + 2 + t - 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9t = 7 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$K\begin{pmatrix}1 + \frac{14}{9}\\ \frac{14}{9}\\ -2 - \frac{7}{9}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{23}{9}\\ \frac{14}{9}\\ \frac{-25}{9}\end{pmatrix}$$

Partie A

$$P(z) = z^3 - (2\sqrt{3}+\sqrt{3}i)z^2 + (4+6i)z - 4\sqrt{3}i$$

1° $P(\sqrt{3}i) = (\sqrt{3}i)^3 - (2\sqrt{3}+\sqrt{3}i)\underbrace{(\sqrt{3}i)^2}_{-3} + (4+6i)\cdot(\sqrt{3}i) - 4\sqrt{3}i$

$= -i3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i + 4\sqrt{3}i - 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}i = 0$

donc $\sqrt{3}i$ est une racine de P

2° $P(z) = (z-\sqrt{3}i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = z^3 - 2\sqrt{3}z^2 + 4z - \sqrt{3}iz^2 + 6iz$
$- 4\sqrt{3}i = z^3 - (2\sqrt{3}+\sqrt{3}i)z^2 + (4+6i)z - 4\sqrt{3}i$
c.q.f.d.

3° $P(z) = 0 \iff z - \sqrt{3}i = 0$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

$\iff \boxed{z = \sqrt{3}i}$

$\Delta = 12 - 16 = -4$

$z_{1,2} = \dfrac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \begin{cases} \sqrt{3}+i \\ \sqrt{3}-i \end{cases}$

$S = \{\sqrt{3}i \,;\, \sqrt{3}+i \,;\, \sqrt{3}-i\}$

Partie B

$A(z_A)$ $z_A = \sqrt{3} - i$

$B(z_B)$ $z_B = \sqrt{3} + i$

$C(z_C)$ C milieu de [OB]

1° $z_C = \dfrac{\sqrt{3}+0}{2} + i\,\dfrac{1+0}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$|z_A| = \sqrt{3+1} = 2$

$z_A = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right)$ $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$

$\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

$z_A = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

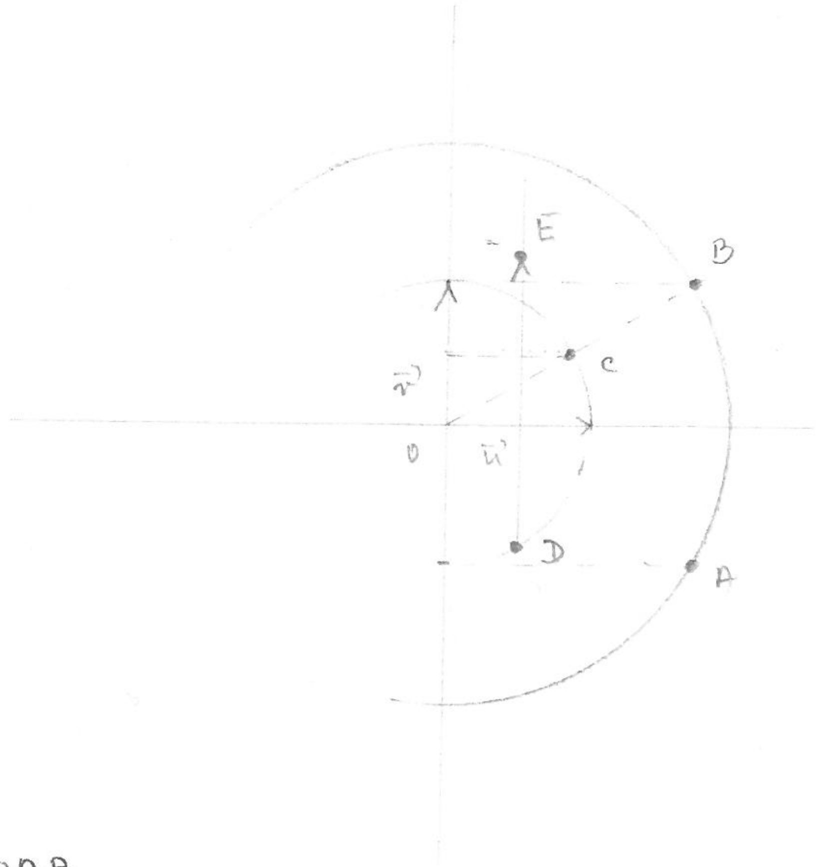
$z_B = \overline{z_A}$ donc $z_B = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

B ex. 3

$|z_C| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\theta = \frac{1}{2}$
$\theta = \frac{\pi}{6}$

$z_C = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

2°



3° $\triangle OAB$

$OA = |z_A| = 2$
$OB = |z_B| = 2$
$AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3}+i - \sqrt{3}+i| = |2i| = 2$

donc $\triangle OAB$ est équilatéral

4° $r_{O; -\frac{\pi}{2}}: C \longrightarrow D$ $t_{2\vec{v}}: D \longrightarrow E$

5° $z_D = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot z_C$

$z_D = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z_D = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$z_D = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{DE} = 2\cdot\vec{v}$

$z_E = 2i + z_D$

$z_E = 2i + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_E = \frac{1}{2} + i\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_E = \frac{1}{2}\left[1 + i(4-\sqrt{3})\right]$

6° $OE = |z_E| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 - 2\sqrt{3} + \frac{3}{4}} = \underline{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$

$BE = |z_E - z_B| = \left|\frac{1}{2} + 2i - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \sqrt{3} - i\right| = \left|\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| =$

$= \sqrt{\frac{1}{4} - \sqrt{3} + 3 + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4}} = \underline{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$ c.q.f.d.

$OE = BE$ donc le triangle OEB est isocèle en E

Corrigé - suites :

1. a) $u_1 = 1{,}015 \cdot u_0 - 300 = 1{,}015 \cdot 5700 - 300 \simeq 5485{,}5$ € c.q.f.d.

b) $u_2 = 1{,}015 u_1 - 300 = 1{,}015 \cdot 5485{,}5 - 300 \simeq 5267{,}78$ €

2. $u_{n+1} = 1{,}015 u_n - 300$

$V_n = u_n - 20\,000$

a) $V_{n+1} = 1{,}015 V_n$

$V_{n+1} = u_{n+1} - 20000 = 1{,}015 u_n - 300 - 20000 = 1{,}015 u_n - 20300 =$

$= 1{,}015 \left(u_n - \frac{20300}{1{,}015} \right) = 1{,}015 (u_n - 20000) = 1{,}015 V_n$ c.q.f.d.

b) $\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1{,}015$ c'est une suite géométrique de raison 1,015

et de premier terme $V_0 = u_0 - 20000 = 5700 - 20000 = -14300$

c) $V_n = u_n - 20000 \Leftrightarrow u_n = V_n + 20\,000 = -14\,300 \cdot q^n + 20000 =$

$= 20000 - 14\,300 \cdot 1{,}015^n$

3. a) $n = 15$

$u_{15} = 20\,000 - 14\,300 \cdot 1{,}015^{15} \simeq 2121{,}68$ € c.q.f.d.

b) $u_n = 0$ $\quad 0 = 20\,000 - 14\,300 \cdot 1{,}015^n$

$14\,300 \cdot 1{,}015^n = 20\,000$

$1{,}015^n = \frac{20\,000}{14\,300}$

$n \lg 1{,}015 = \lg \frac{20\,000}{14\,300}$

$n = \frac{\lg \frac{20\,000}{14\,300}}{\lg 1{,}015}$

$n \simeq 22{,}5$ Donc le remboursement intégral du prêt se fera en 23 mois.

c) $u_{22} = 20\,000 - 14\,300 \cdot 1{,}015^{22} \simeq 157{,}84$

Le montant de la dernière mensualité au 23ème mois sera $157{,}84 \cdot 1{,}015 = 160{,}21$ €

d) La personne a remboursé 300 euros par mois pendant 22 mois et a versé une dernière mensualité de 160,21 euros donc le coût total de l'achat est $22 \cdot 300 + 160{,}21 = \underline{6760{,}21 \text{ €}}$