MATURITA DES SECTIONS BILINGUES
FRANCO-TCHÈQUES ET FRANCO-SLOVAQUES

EXAMEN DE MATURITA BLANCHE BILINGUE

Année scolaire 2018-2019
Session de mars 2019

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4h

Le sujet est constitué de 4 exercices. Les quatre exercices sont obligatoires.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'emploi des instruments de dessin et de calcul, et l'utilisation du formulaire sont autorisés.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice n° 1
(sur 7 points)

Le but du problème est l´étude de la fonction f définie sur l´intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x+x}.$$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.
On choisit 5 cm pour l´unité graphique.

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur l´intervalle $[0,+\infty[$ par: $g(x)=e^x(x-2)-1$.

1) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2) Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g.
   En déduire le tableau de variation de la fonction g sur l´intervalle $[0,+\infty[$.
3) Démontrer que l´équation $g(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[2;3]$.
   Donner un encadrement de α d´amplitude 10^{-2}.
4) En déduire le signe de $g(x)$ sur l´intervalle $[0,+\infty[$.

PARTIE B - Étude de la fonction f

1) Démontrer que pour tout nombre réel $x \in [0, +\infty[$, on a: $f(x) = \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}$.
2) En déduire la limite de f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
3) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 1$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
4) Démontrer que la fonction dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ est définie par : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x+x)^2}$.
5) Dresser le tableau de variation de f.
6) On admet que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$. Déterminer une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
7) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite $(\mathcal{D})$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice n° 2
(sur 4 points)

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace.
On considère les points $A(2; 4; 1)$, $B(0; 4; -3)$, $C(3; 1; -3)$, $D(1; 0; -2)$, $E(3; 2; -1)$ et $I\left(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5}\right)$.

Partie A

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1) $2x + 2y - z - 11 = 0$ est une équation du plan (ABC).
2) Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (CD).
5) Le point I est sur la droite (AB).

Partie B

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point D et perpendiculaire au plan (ABC).
2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (Δ) avec le plan (ABC).

Exercice n° 3
(sur 5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

On considère le polynôme de variable complexe z :
$$P(z) = z^3 - \left(2\sqrt{3} + \sqrt{3}\, i\right) z^2 + (4 + 6\, i)\, z - 4\sqrt{3}\, i \ .$$

1) Démontrer que $\sqrt{3}\, i$ est une racine de P.
2) Montrer que $P(z) = (z - \sqrt{3}\, i)(z^2 - 2\sqrt{3}\, z + 4)$.
3) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

On considère les points A d'affixe $z_A = \sqrt{3} - i$, B d'affixe $z_B = \sqrt{3} + i$ et C le milieu du segment $[OB]$ d'affixe z_C.

1) Vérifier que l'affixe de C est $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$ et déterminer une forme trigonométrique pour chacun des nombres complexes z_A, z_B et z_C.
2) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan.
3) Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
4) Soit D l'image de C par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation t de vecteur $2\vec{v}$.
   Placer les points D et E sur la figure.
5) Déterminer l'affixe z_D du point D et montrer que le point E a pour affixe
$$z_E = \frac{1}{2}\left[1 + i\left(4 - \sqrt{3}\right)\right]$$
6) Montrer que $OE = BE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$. Que pouvez-vous en déduire sur la nature du triangle OEB.

Exercice n° 4
(sur 4 points)

En janvier 2021 une personne s´est décidé à acheter un scooter coûtant 5700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui a proposé un crédit à la consommation d´un montant de 5700 euros, au taux mensuel de 1,5 %. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l´emprunteur à l´organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmenter de 1,5 % puis basse de 300 euros.
Le premier versement a lieu le 25 fevrier 2021.
On note u_n le capital restant dû en euros juste après la n-ième mensualité (n entier naturel non nul). On convient quo $u_0 = 5700$.
Les résultats seront donnés sous forme approchée û 0,01 près si nécessaire.

1. a) Démontrer que u_1 , capital restant dû au 26 fevrier 2021 juste après la première mensualité est de 5485,5 euros.
   b) Calculer u_2 .

2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :
   $u_{n+1} = 1{,}015u_n - 300$
   Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 20000$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a: $v_{n+1} = 1{,}015v_n$.
   b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison et de premier terme à déterminer.
   c) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que, pour tout entier naturel n , on a:

$$u_n = 20000 - 14300 \cdot 1{,}015^n$$

3. A l´aide de la réponse précédente , répondre aux questions suivantes:
   a) Démontrer qu´une valeur approchée du capital restant dû par l´emprunteur au 26 avril 2022 est 2121,68 euros.
   b) Déterminer le nombre de mensualités nécessaire pour rembourser intégrelement le prêt .
   c) Quel sera le montant de la dernière mensualité?
   d) Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation , quel sera le coût total de son achat?