Exercice n° 1

PARTIE : A

① $g'(x) = \left(\frac{1}{2} + (-x^2+x+1)e^{-x}\right)' = (-2x+1)e^{-x} + (-x^2+x+1)e^{-x}(-1)$

$= e^{-x}(-2x+1+x^2-x-1)$

$g'(x) = e^{-x}(x^2-3x)$

② $e^{-x} > 0.$

$x^2-3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=3.$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
Signe de x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$g(3)$	↗	$\frac{1}{2}$

$g(0) = \frac{1}{2} + (1)e^{-0} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$g(3) = \frac{1}{2} + (-3^2+3+1)e^{-3} = \frac{1}{2} + (-9+4)e^{-3} = \frac{1}{2} - \frac{5}{e^3}$

③ (i) Pour $]-\infty;0[$: $\begin{cases} g \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;0[\\ g \text{ est continue sur }]-\infty;0[\text{ car elle est dérivable} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \\ g(0) = \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$

d'où $g(x)=0$ admet une unique solution dans $]-\infty;0[$.

Pour $[0;+\infty[$: g est minorée par $g(3) = \frac{1}{2} - \frac{5}{e^3} > 0$

d'où $g(x)=0$ n'admet aucune solution $[0;+\infty[$.

Conclusion : l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

(ii) On a $g(-0,8) < 0$ et $g(-0,7) > 0$.

De là : $-0,8 < \alpha < -0,7$.

④

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

PARTIE B

① $f(x) = \frac{x}{2} + (x^2+x)e^{-x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{2}}_{\to+\infty} + \underbrace{x^2e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{xe^{-x}}_{\to 0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x}{2}}_{\to-\infty} + \overbrace{\underbrace{(x^2+x)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}}^{\to+\infty}$$ (on a une indétermination)

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to 0} + \underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)\overbrace{e^{-x}}^{\to+\infty}}_{\to+\infty}\right)}_{\to+\infty} = +\infty$$

② ⓐ $f'(x) = \left(\frac{x}{2} + (x^2+x)e^{-x}\right)' = \frac{1}{2} + (2x+1)e^{-x} + (x^2+x)e^{-x}(-1)$

$= \frac{1}{2} + (2x+1-x^2-x)e^{-x} = \frac{1}{2} + (-x^2+x+1)e^{-x}$

$= g(x)$

ⓑ

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

③ $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f(0) = 0 + 0 = 0$

$f'(0) = g(0) = \frac{3}{2}$

$(T) : y = \frac{3}{2}x$

④ ⓐ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x)e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{x^2 e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{x e^{-x}}_{\to 0} = 0$

Par conséquent, (D) est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

⑤ Soit $d(x) = f(x) - \frac{x}{2}$.

$d(x) = (x^2 + x)e^{-x} = x(x+1)e^{-x}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de $x(x+1)$		+	0	−	0	+	
Signe de e^{-x}		+		+		+	
Signe de $d(x)$		+	0	−	0	+	

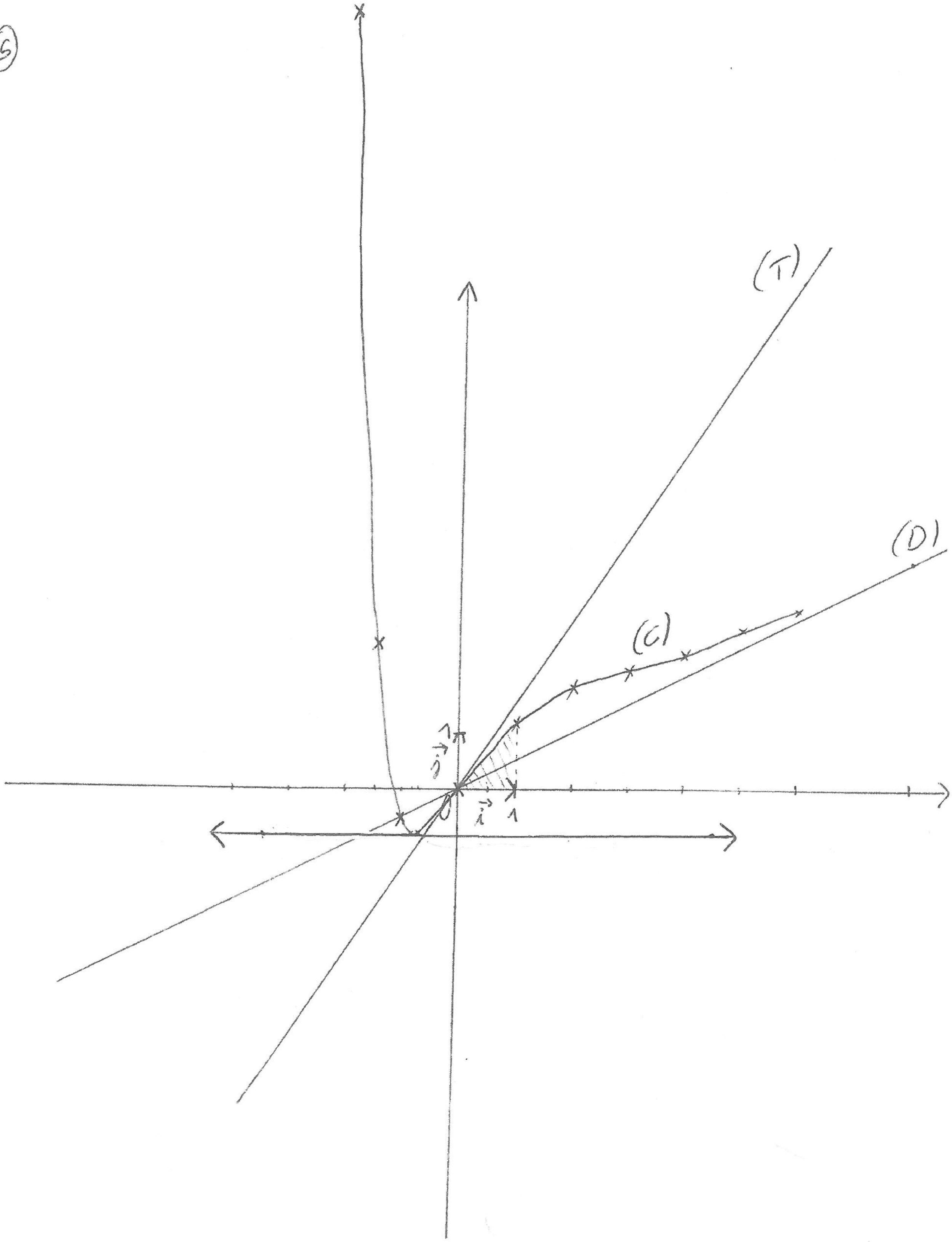
$\cup \rightarrow$

(C) est strictement au-dessus de (D) sur $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

(C) est strictement en dessous de (D) sur $]-1; 0[$.

(C) et (D) admettent 2 points d'intersection en -1 et en 0.

5



PARTIE C

① $F'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + (-x^2 - 3x - 3)e^{-x}\right)'$

$= \frac{2x}{4} + (-2x - 3)e^{-x} + (-x^2 - 3x - 3)e^{-x}(-1)$

$= \frac{x}{2} + (x^2 + 3x + 3 - 2x - 3)e^{-x}$

$= \frac{x}{2} + (x^2 + x)e^{-x}$

$= f(x)$

Donc, F est une fonction primitive de f.

② Comme $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{4} + (-1 - 3 - 3)e^{-1} - (-3e^{-0})$

$= \frac{1}{4} - \frac{7}{e} + 3$

$\mathcal{A} = \frac{13}{4} - \frac{7}{e}$

$\mathcal{A} = \frac{13}{4} - \frac{7}{e}$ cm^2

Exercice n°2

① ⓐ $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{ID} = (1)(-1)+(1)(1)+(\frac{1}{2})(0) = -1+1+0 = 0$

d'où $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont orthogonaux

et donc le triangle DIJ est rectangle en I.

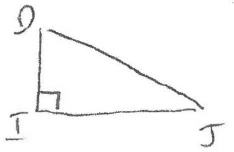
ⓑ $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$DI = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$IJ = \sqrt{1^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

ⓒ



$\mathcal{A}_{DIJ} = \frac{IJ \cdot DI}{2} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

② ⓐ $\overrightarrow{ID}\wedge\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$(DIJ): x+y-4z+d=0$

$D\in(DIJ) \Leftrightarrow 1+d=0 \Leftrightarrow d=-1$

$(DIJ): x+y-4z-1=0$

Vérification : $I\in(DIJ) \Leftrightarrow 1-1=0 \Leftrightarrow$ VRAI

$J\in(DIJ) \Leftrightarrow 2+1-2-1=0 \Leftrightarrow$ VRAI

$D\in(DIJ) \Leftrightarrow 1-1=0 \Leftrightarrow$ VRAI.

② ⓑ $d(H,(DIJ)) = \frac{|0+1-4-1|}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4\sqrt{18}}{18} = \frac{2\sqrt{2\times 9}}{9} = \frac{2\sqrt{2}\,3}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

③ $V_{HDIJ} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{DIJ} \; d(H,(DIJ)) = \frac{1}{3} \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{4\times 3} = \frac{1}{3}$

④ ⓐ $J(2;1;\frac{1}{2})$

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (HDI) et donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (d) car $(d) \perp (HDI)$.

$(d) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$

ⓑ (i) $P(2+t\,;1+t\,;\frac{1}{2})$

$P \in (HDI) \Leftrightarrow (2+t) + (1+t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = -1$

$P\begin{pmatrix}2-1\\1-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(ii) $\vec{JP}\begin{pmatrix}1-2\\0-1\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$JP = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

La longueur du segment [JP] est $\sqrt{2}$.

ⓒ $V_{HDIJ} = \mathcal{A}_{HDI} \cdot JP \cdot \frac{1}{3}$

$\mathcal{A}_{HDI} = \frac{V_{HDIJ} \cdot 3}{JP} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

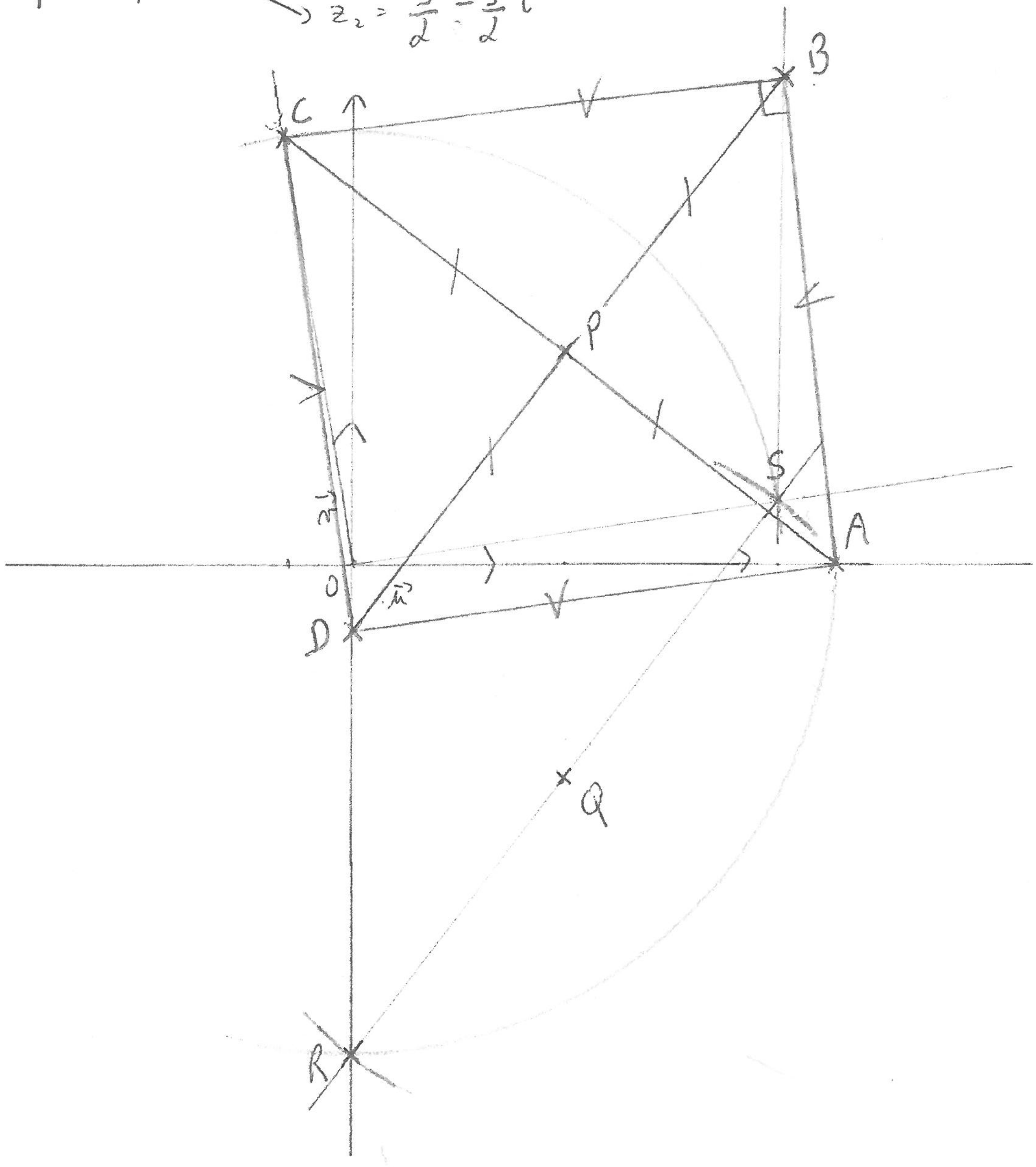
Exercice n° 3

① $2z^2 - 6z + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 72 = -36$

$z_{1,2} = \dfrac{6 \pm 6i}{4} = \dfrac{6 \pm 6i}{4}$ → $z_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$ → $z_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$

②



$4\sqrt{3}$ cm $\simeq 6{,}9$ cm (pour R)

③ Écriture complexe de la symétrie : $z' - z_Q = -(z - z_Q)$

$$z' = -z + 2z_Q$$

$$z' = -z + 3 - 3i.$$

On a donc : $z_S = -z_R + 3 - 3i = +2i\sqrt{3} + 3 - 3i$

$$= 3 + i(2\sqrt{3} - 3).$$

④ Écriture complexe de la rotation : $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$

$$z' = i\,z.$$

On a : $z_A = i\,z_R = i(-2i\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

$$z_C = i\,z_S = i(3 + i(2\sqrt{3} - 3)) = (3 - 2\sqrt{3}) + 3i.$$

⑤ Écriture de la translation : $z' = z + 3i.$

On a $z_B = z_S + 3i = 3 + i(2\sqrt{3} - 3) + 3i = 3 + 2\sqrt{3}\,i$

$$z_D = z_R + 3i = -2i\sqrt{3} + 3i = i(3 - 2\sqrt{3}).$$

⑥ (i) $\frac{1}{2}(z_C + z_A) = \frac{(3 - 2\sqrt{3}) + 3i + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 3i}{2} = z_P$

d'où P est le milieu du segment [AC].

(ii) $\frac{1}{2}(z_D + z_B) = \frac{1}{2}\left(i(3 - 2\sqrt{3}) + (3 + 2\sqrt{3}\,i)\right) = \frac{3 + 3i}{2} = z_P$

d'où P est le milieu du segment [BD].

⑦ $$\frac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = \frac{(3 - 2\sqrt{3}) + 3i - \frac{3}{2}(1 + i)}{3 + 2\sqrt{3}i - \frac{3}{2}(1 + i)} = \frac{\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + \frac{3}{2}i}{\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}i - \frac{3}{2}i} = \frac{\left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + \frac{3}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}i + \frac{3}{2}i\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{9}{4}} - 3\sqrt{3}i + \frac{9}{4}i - \cancel{3\sqrt{3}} + 12i - 3\sqrt{3}i + \frac{9}{4}i - \cancel{3\sqrt{3}i^2} + \cancel{\frac{9}{4}i^2}}{\frac{9}{4} + 12 + \frac{9}{4} - 2\sqrt{3}\,3}$$

$$= \frac{\left(\frac{18}{4} + 12\right)i - 6\sqrt{3}i}{\frac{18}{4} + 12 - 6\sqrt{3}} = \frac{\frac{18}{4} + 12 - 6\sqrt{3}}{\frac{18}{4} + 12 - 6\sqrt{3}}\,i = i$$

① Comme P est le milieu des segments [AC] et [BD],
les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu.

Comme $\dfrac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = i$ on a $\begin{cases} \vec{PB} \text{ et } \vec{PC} \text{ sont orthogonaux} \\ PB = PC \end{cases}$

d'où les diagonales sont $\begin{cases} \text{perpendiculaires} \\ \text{de même longueur} \end{cases}$.

Le quadrilatère ABCD est donc un carré.

Exercice n°4

Partie A

	Romans policiers	Biographies	Total
Français	$150 \times 40\% = 60$	$50 \times 70\% = 35$	$60 + 35 = 95$
Non Français	$150 - 60 = 90$	$50 - 35 = 15$	$90 + 15 = 105$
Total	150	50	200

Partie B

1) $P = \frac{150}{200} = 0,75$

b

2) $P = \frac{150 + 35}{200} = 0,925$

a

3) $P = \frac{60}{200} = 0,3$

c

4) $P = \frac{95}{200} = 0,475$

c

5) $P = \frac{15}{200} = 0,075$

a

6) $P = 1 - \left(P(\text{il n'a pas choisi de roman policier})\right)^{20} = 1 - \left(\frac{50}{200}\right)^{20} = 1 - (0,25)^{20}$

a