MATURITA DES SECTIONS BILINGUES
FRANCO-TCHÈQUES ET FRANCO-SLOVAQUES

EXAMEN DE MATURITA BILINGUE

Année scolaire 2016-2017
Session de mai 2017

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4h

Le sujet est constitué de 4 exercices. Les quatre exercices sont obligatoires.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'emploi des instruments de dessin et de calcul, et l'utilisation du formulaire sont autorisés.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice n° 1
(sur 7,5 points)

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln x + x - 3$.

1. Justifier que la fonction g est strictement croissante sur l´intervalle $]0;+\infty[$.
2. Démontrer que l´équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que celle-ci appartient à l'intervalle $[2;3]$.
   Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, sur l´axe des abscisses d'unité graphique $\mathbf{1\ cm}$ et sur l´axe des ordonnées d'unité graphique $\mathbf{2\ cm}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de l´intervalle de définition.
   Donner une interprétation graphique du résultat.
2. Montrer que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
   En déduire le sens de variations de f .
   Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

PARTIE C

Soit (C') la courbe d´équation $y = \ln x$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $f(x) - \ln x = \frac{2-\ln x}{x}$.
2. Étudier le signe de $\frac{2-\ln x}{x}$. En déduire la position relative de la courbe (C) par rapport à la courbe (C').
   Dans la suite, on notera K l'unique point d'intersection des courbes (C) et (C').
   Déterminer les coordonnées de K.
3. Tracer avec précision la courbe (C), la courbe (C'), la tangente (T) et placer le point d'intersection K.
4. Calculer $\int_1^{e^2} \frac{2-\ln x}{x}\,dx$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice n° 2
(sur 4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(1\,;2\,;3)$, $B(\,0\,;1\,;4)$, $C(-1\,;-3\,;\,2)$, $D\,(4\,;-2\,;\,5)$ et le vecteur $\vec{n}(2;-1;1)$.

1.
   a. Démontrer que les points A, B, et C ne sont pas alignés.
   b. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC).
   c. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \\ z = 4-t \end{cases}$ $,t \in \mathbb{R}$.

   Montrer que le point D appartient à la droite (Δ).
   Justifier que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).
3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC). Calculer ses coordonnées.
   Calculer la distance de D au plan (ABC).
4. Calculer l'aire du triangle ABC et puis le volume du tétraèdre $ABCD$.
   On rappelle que le volume du tétraèdre est $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B}\,h}{3}$ *où* $\mathcal{B}$ *est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur du tétraèdre s'appuyant sur cette base.*

Exercice n° 3
(sur 4,75 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Proposition 1 :
Soit (E) l´équation $z^3 - 3z^2 + 9\,z + 13 = 0$ où z appartient à l´ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. L'ensemble des solutions $S = \{-1; 2-5i; 2+5i\}$.

Proposition 2 :
Les points $A(-1)$, $B(2-3i)$ et $C(2+3i)$ sont les sommets d´un triangle rectangle.

Proposition 3 :
$\frac{2\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3}+i\right)^8$.

Proposition 4 :
L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est une droite qui passe par le point A d´affixe $3i$.

Proposition 5 :
Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument du complexe z , alors $|i+z| = 1+|z|$.

Exercice n° 4
(sur 3,75 points)

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles

Monsieur Dubouchon pèche à la ligne dans son étang où ne vivent que trois carpes et sept tanches. Il a décidé de pêcher jusqu´à ce qu´il ait pris quatre poissons. En supposant que chacun des dix poissons a la même probabilité de se faire prendre et qu´ils ont tous des poids différents, déterminer la probabilité de chacun des événements aléatoires suivants :

Partie 1

A = « exactement un des poissons pris est une carpe »
B = « les quatre poissons pris sont des tanches »
C = « l´un au moins des quatre poissons pris est une carpe ».

Partie 2

D = « le premier poisson pris est une carpe »
E = « le second poisson pris est une carpe »
F = « les deux premiers poissons pris sont des carpes »
G = « au moins l'un des deux premiers poissons pris est une carpe »

H = « chacun des trois derniers poissons pris pèse plus que le précédent ».