PARTIE A

① $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 \quad \forall x \in]0;+\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[$: $x > 0$

$\frac{1}{x} > 0$

$\frac{1}{x} + 1 > 1$

$\frac{1}{x} + 1 > 0$

$g'(x) > 0$.

Donc, la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

② $\begin{cases} g(2) = \ln 2 + 2 - 3 = \ln 2 - 1 < 0 \\ g(3) = \ln 3 + 3 - 3 = \ln 3 > 0 \\ g \text{ est continue sur } [2;3] \text{ car elle } g \text{ est dérivable} \\ g \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[\end{cases}$

et donc, par le théorème de la bijection, $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2;3]$.

Avec la calculatrice, on trouve que $\alpha \in [2,2;2,3]$.

③

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$	||	$-$	0	$+$	

PARTIE B $\quad f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2$

①

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\underbrace{\left(\overset{\to 1}{1} - \underbrace{\frac{\overset{\to 1}{1}}{\underset{\to 0^+}{x}}}_{\to +\infty}\right)}_{\to -\infty} \underbrace{\left(\underset{\to -\infty}{\ln x} - \underset{\to 2}{2}\right)}_{\to -\infty}}_{\to +\infty} + \overset{\to 2}{2} = +\infty$$

par le théorème de la limite d'une opération.

Interprétation graphique : la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{\underbrace{\left(\overset{\to 1}{1} - \underbrace{\frac{\overset{\to 1}{1}}{\underset{\to +\infty}{x}}}_{\to 0}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(\underset{\to +\infty}{\ln x} - \underset{\to 2}{2}\right)}_{\to +\infty}}_{\to +\infty} + \underset{\to 2}{2} = +\infty$$

par le même théorème que celui utilisé ci-dessus.

② $\forall x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = -(-1)\,x^{-2}(\ln x - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}$

$$= \frac{\ln x - 2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{\ln x + x - 3}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}.$$

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

f est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$

f est strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

③ $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = \left(1 - \frac{1}{1}\right)(\ln 1 - 2) + 2 = 2$

$f'(1) = \frac{g(1)}{1^2} = g(1) = \ln 1 + 1 - 3 = 1 - 3 = -2$

$(T) : y = -2(x-1) + 2 = -2x + 2 + 2$

$(T) : y = -2x + 4.$

$\boxed{\text{PARTIE C}}$

① $\forall x \in]0;+\infty[: f(x) - \ln x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2 - \ln x$

$= \cancel{\ln x} - \cancel{2} - \frac{1}{x}\ln x + \frac{2}{x} + \cancel{2} - \cancel{\ln x}$

$= \frac{2 - \ln x}{x}.$

② $\frac{2 - \ln x}{x} = 0 \iff 2 - \ln x = 0 \iff 2 = \ln x \iff e^2 = e^{\ln x} \iff e^2 = x.$

x	0		e^2		$+\infty$
Signe de $2 - \ln x$	‖	$+$	0	$-$	
Signe de x	‖	$+$		$+$	
Signe de $\frac{2-\ln x}{x}$	‖	$+$	0	$-$	

(C) est au-dessus de (C') sur $]0;e^2[$.

(C) est en dessous de (C') sur $]e^2;+\infty[$.

(C) et (C') sont confondues en e^2.

$f(e^2) = \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)(\ln e^2 - 2) + 2 = 2$; $K(e^2;2)$.

③ Voir l'annexe.

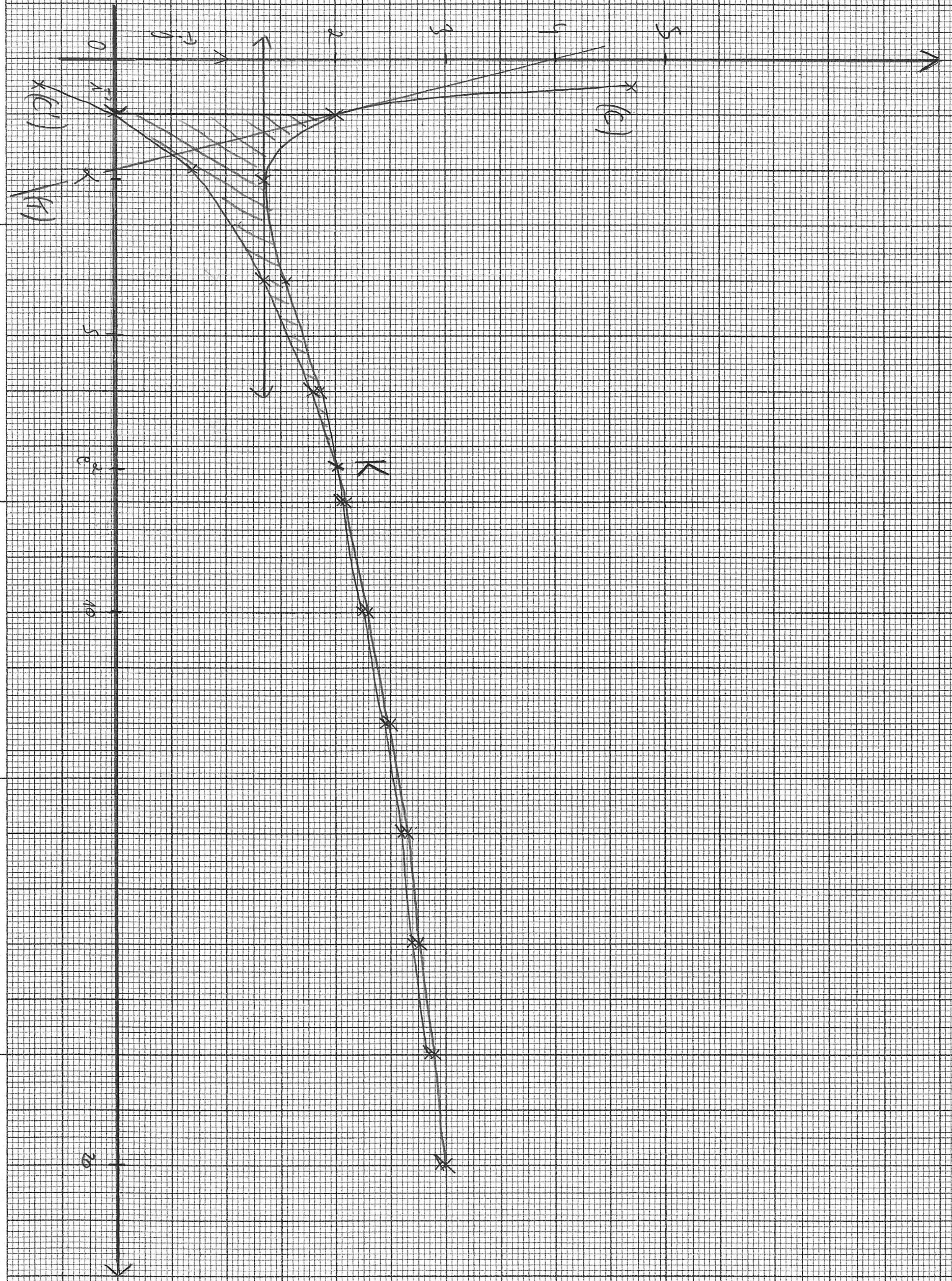
④ $\int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,dx = \int_1^{e^2} \frac{2}{x}\,dx - \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[2\ln x\right]_1^{e^2} - \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^{e^2}$

$= 2\ln e^2 - 2\ln 1 - \left[\frac{\ln^2 e^2}{2} - \frac{\ln^2 1}{2}\right] = 4 - \frac{2^2}{2} = 4 - 2$

$= 2$

L'aire du domaine délimité par les courbes (C) et (C') et par les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$ est de 2 unités d'aire.

3



① ⓐ $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}0-1\\1-2\\4-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\-3-2\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-5\\-1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{\times 2}\\\xrightarrow{\times 5}\\\xrightarrow[\times -1]{}\end{matrix}\begin{pmatrix}-2\\-5\\-1\end{pmatrix}$$

et donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaire

d'où A, B et C ne sont pas alignés.

ⓑ $\vec{n}(2;-1;1)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=(2)(-1)+(-1)(-1)+(1)(1)=-2+1+1=0$

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=(2)(-2)+(-1)(-5)+(1)(-1)=-4+5-1=0$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{AB}$ et à $\vec{AC}$

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaire

Conclusion : $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

ⓒ $(ABC) : 2x-y+z+d=0$

$A\in(ABC) \Leftrightarrow 2(1)-(2)+3+d=0 \Leftrightarrow d=-3$

$(ABC) : 2x-y+z-3=0$.

② Si $t=-1$ alors $\begin{cases}x=2-2t=4\\y=-1+t=-2\\z=4-t=5\end{cases}$.

Ce sont les coordonnées de D et donc $D\in(\Delta)$.

Comme $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ)

et $\vec{n}$ est un vecteur normal de (ABC),

on conclut que $(\Delta)\perp(ABC)$.

③ E est le point d'intersection de (Δ) et de (ABC).

$$E\begin{pmatrix} 2-2t \\ -1+t \\ 4-t \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} E \in (ABC) &\iff 2(2-2t) - (-1+t) + (4-t) - 3 = 0 \\ &\iff 4 - 4t + 1 - t + 4 - t - 3 = 0 \\ &\iff 6 - 6t = 0 \\ &\iff t = 1. \end{aligned}$$

$$E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$d(D, (ABC)) = ED = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} = \sqrt{4\times 6}$$
$$= 2\sqrt{6}.$$

④ $$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 1-(-5) \\ -(1-(-2)) \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+9+9} = \frac{1}{2}\sqrt{54} = \frac{1}{2}\sqrt{9\times 6} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

$$V_{ABCD} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \times ED}{3} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{6}\ 2\sqrt{6}}{3} = 6.$$

Proposition 1

Si $z = 2+5i$ alors (E) $\Leftrightarrow (2+5i)^3 - 3(2+5i)^2 + 9(2+5i) + 13 = 0$

$\Leftrightarrow (4+20i+25i^2)(2+5i) - 3(4+20i+25i^2)$

$+ 18 + 45i + 13 = 0$

$\Leftrightarrow (20i-21)(2+5i) - 3(20i-21) + 31 + 45i = 0$

$\Leftrightarrow 40i + 100i^2 - 42 - 105i - 60i + 63 + 31 + 45i = 0$

$\Leftrightarrow -48 - 80i = 0$

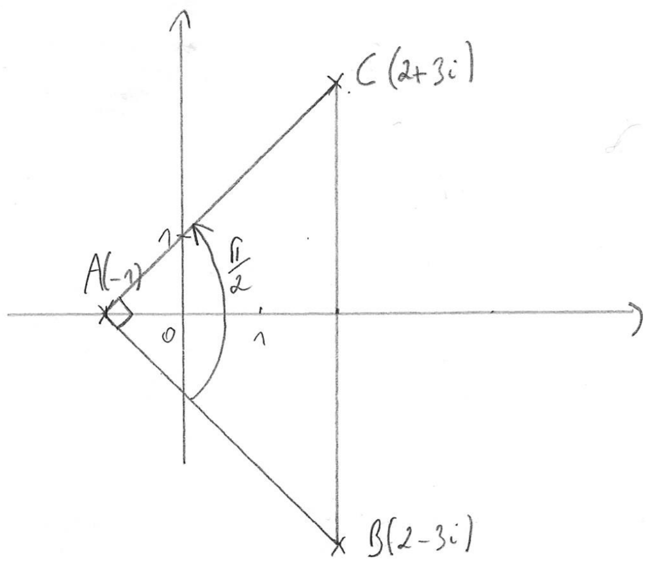
$\Leftrightarrow$ FAUX.

$2+5i$ n'est donc pas solution de (E)

et donc $S \neq \{-1 ; 2-5i ; 2+5i\}$.

La proposition est fausse.

Proposition 2



$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg \frac{c-a}{b-a} = \arg \frac{2+3i-(-1)}{2-3i-(-1)}$

$= \arg \frac{3+3i}{3-3i} = \arg \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$

$= \arg \frac{1^2+i^2+2i}{1^2-i^2} = \arg \frac{2i}{2}$

$= \arg i$

$= \frac{\pi}{2}$

d'où $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$

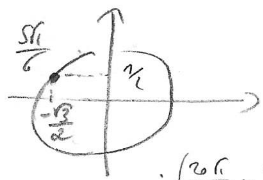
et donc ABC est rectangle en A.

La proposition est vraie.

Proposition 3 : $\frac{2\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $(-\sqrt{3}+i)^8$.

$$|-\sqrt{3}+i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$-\sqrt{3}+i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$



$$(-\sqrt{3}+i)^8 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^8 = 2^8 e^{i\frac{40\pi}{6}} = 2^8 e^{i\left(\frac{20\pi}{3}-\frac{18\pi}{3}\right)}$$

$$= 2^8 e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

La proposition est vraie.

Proposition 4 : L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $3i$.

Soit $B(4)$ et $C(-2i)$ et $M(z)$.

On a : $|z-4| = |z+2i| \Leftrightarrow |z-4| = |z-(-2i)|$

$\Leftrightarrow |z - z_B| = |z - z_C|$

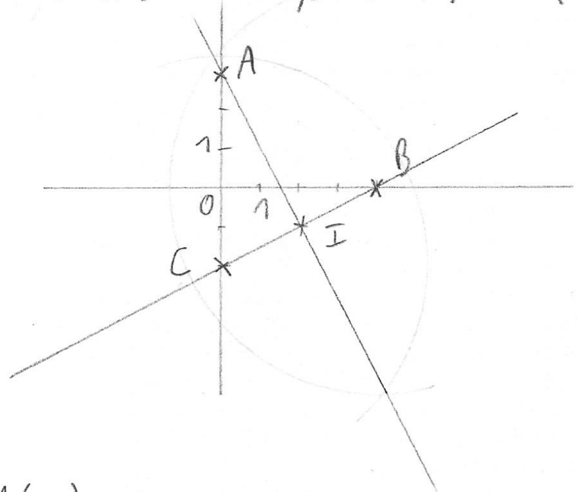
$\Leftrightarrow |z_M - z_B| = z_M - z_C|$

$\Leftrightarrow |z_{\vec{BM}}| = |z_{\vec{CM}}|$

$\Leftrightarrow BM = CM$

$\Leftrightarrow$ M est sur la médiatrice du segment [BC].

Donc, l'ensemble de points est la médiatrice du segment [BC].



$A(3i)$

$AB = |z_{\vec{AB}}| = |z_B - z_A| = |4-3i| = \sqrt{16+9} = 5$

$AC = |z_{\vec{AC}}| = |z_C - z_A| = |-2i-3i| = |-5i| = 5$

$AB = AC$

A est sur la médiatrice du segment [BM].

La proposition est vraie.

Proposition 5 : Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument du complexe z, alors $|i+z| = 1 + |z|$.

Supposons que $\frac{\pi}{2}$ est un argument du complexe z.

$z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$ et $y > 0$.

$$|i+z| = 1+|z| \iff |i+iy| = 1+|iy|$$
$$\iff |i(1+y)| = 1+y$$
$$\iff |i||1+y| = 1+y$$
$$\iff 1.(1+y) = 1+y$$
$$\iff \text{VRAI}.$$

La proposition est vraie.

Il y a équiprobabilité car les poissons ont la même probabilité de se faire prendre.

(3 carpes 7 tanches)

PARTIE 1

Tirage simultané (tirage successifs sans remise et sans ordre) $\Rightarrow$ combinaisons.

(A) $p(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{C_3^1 C_7^3}{C_{10}^4} = \dfrac{3 \times 35}{210} = \dfrac{105}{210} = \boxed{\dfrac{1}{2} = p(A)}$

$C_7^3 = \dfrac{7!}{4!\,3!} = \dfrac{7\times6\times5}{6} = 35$; $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{6!\,4!} = \dfrac{10\times \cancel{9}^{3}\times \cancel{8}^{2}\times 7}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}} = 210.$

(B) $p(B) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{C_7^4}{C_{10}^4} = \dfrac{C_7^3}{C_{10}^4} = \dfrac{35}{210} = \boxed{\dfrac{1}{6} = p(B)}$.

(C) $p(C) = p($l'un au moins des 4 poissons pris est une carpe$)$

$= 1 - p($il n'y a pas de carpe parmi les 4 poissons pris$)$

$= 1 - p($tous les poissons pris sont des tanches$)$

$= 1 - p(B) = 1 - \dfrac{1}{6}$

$\boxed{p(C) = \dfrac{5}{6}}$.

PARTIE 2

Tirage successifs sans remise avec ordre $\Rightarrow$ arrangements.

(D) $p(D) = \dfrac{A_3^1 \cdot A_9^3}{A_{10}^4} = \dfrac{(3)\times(\cancel{9}\times\cancel{8}\times\cancel{7})}{10\times\cancel{9}\times\cancel{8}\times\cancel{7}} = \boxed{\dfrac{3}{10} = p(D)}$.

(E) $p(E) = p(D) = \boxed{\dfrac{3}{10} = p(E)}$.

(F) $p(F) = \dfrac{A_3^2\, A_8^2}{A_{10}^4} = \dfrac{(\cancel{3}\times 2)\times(\cancel{8}\times\cancel{7})}{\cancel{10}_{5}\times\cancel{9}_{3}\times\cancel{8}\times\cancel{7}} = \boxed{\dfrac{1}{15} = p(F)}$.

(G) $p(G) = p(D\cup E) = p(D) + p(E) - p(D\cap E) = p(D) + p(E) - p(F)$

$= \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{15} = \dfrac{6}{10} - \dfrac{1}{15} = \dfrac{9}{15} - \dfrac{1}{15} = \boxed{\dfrac{8}{15} = p(G)}$.

(H) $p(H) = \dfrac{\frac{A_{10}^4}{A_4^4}}{A_{10}^4} = \dfrac{1}{A_4^4} = \dfrac{1}{4\times3\times2\times1} = \boxed{\dfrac{1}{24} = p(H)}$.