Sujet C

Exercice 1.

Partie A

$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x \qquad D_g =]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

1) $\forall x > 0,\ g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x} > 0$

Donc la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

2) D'après 1), la fonction g est dérivable donc continue et elle est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$g(0,8) \approx -0,42 < 0$; $g(0,9) \approx 0,25 > 0$ donc d'après le théorème de la bijection l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$ telle que $0,8 < \alpha < 0,9$.

$g(0,86) \approx -0,029$; $g(0,87) \approx 0,0384$ donc une valeur approchée à 10^{-2} est $0,86$.

3) D'après le précédent, $g(x) < 0$ sur $]0;\alpha[$

$g(\alpha) = 0$

$g(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$

Partie B

$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2} \qquad D_f =]0;+\infty[$

1) Limites :

en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$; $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$

D'où $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to 0^+} 2x - \frac{\ln x}{x^2} = +\infty}}$ Donc l'axe (Oy) est asymptote verticale à (C).

en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 2x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ (formulaire)}\end{array}\right\}$ $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to +\infty} 2x - \frac{\ln x}{x^2} = +\infty}}$

2) $\forall x>0,\ f'(x) = 2 - \dfrac{(\ln x)' \cdot x^2 - \ln x \cdot (x^2)'}{x^4} = 2 - \dfrac{x - 2x\ln x}{x^4} =$

$$= \frac{2x^4 - x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{x \cdot (2x^3 - 1 + 2\ln x)}{x^4} =$$

$$= \frac{g(x)}{x^3}$$

3) $\forall x>0,\ x^3>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

Tableau de variations :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\alpha) \approx 1{,}9$

4) $(\mathcal{D})$ d'équation $y=2x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 0$ (formulaire)

Donc $(\mathcal{D})$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

5) Pour étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$

on étudie le signe de $f(x)-2x$.

$\forall x>0,\ f(x)-2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$; $x^2>0$ donc $f(x)-2x$ est du signe de $-\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f(x)-2x$		$+$	0	$-$	

$(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$ sur $]0;1[$;

$(\mathcal{C})$ coupe $(\mathcal{D})$ en 1

$(\mathcal{C})$ est en dessous de $(\mathcal{D})$ sur $]1;+\infty[$.

Partie C

1) Sur l'intervalle $[1;3]$ $f(x)-2x \leq 0$;

donc l'aire du domaine ω est $\mathcal{A} = \int_1^3 |f(x)-2x|\,dx = \int_1^3 \left| -\frac{\ln x}{x^2} \right| dx = \int_1^3 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

2) $F(x) = \frac{-\ln x - 1}{x}$; $x \in]0;+\infty[$

$F'(x) = -\frac{(\ln x+1)' \cdot x - (\ln x+1)\cdot 1}{x^2} = -\frac{1-\ln x-1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$

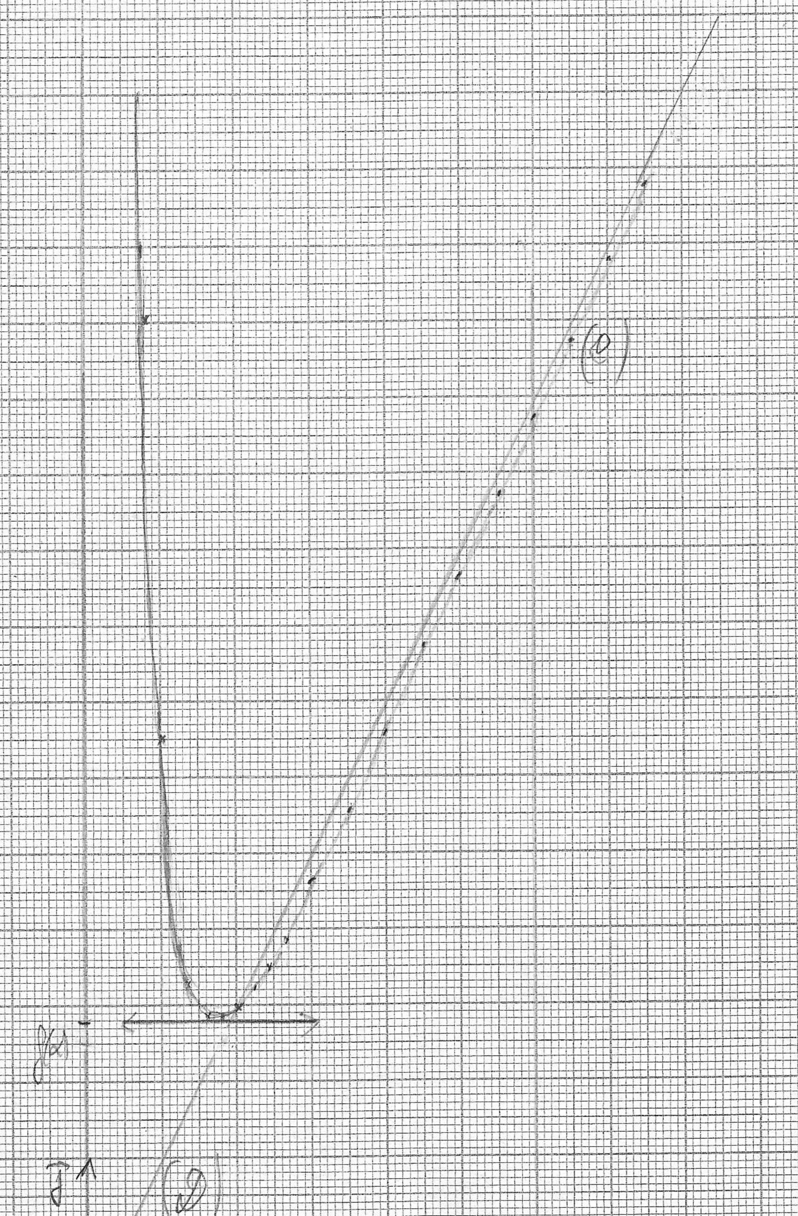
Donc F est une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$

3) $\mathcal{A} = \int_1^3 \frac{\ln x}{x^2}\,dx \cdot u.a = \left[\frac{-\ln x - 1}{x}\right]_1^3 u.a = \left(\frac{-\ln 3 - 1}{3} - \frac{-1}{1}\right) u.a =$

$= \frac{2-\ln 3}{3}\, u.a = \frac{2-\ln 3}{3} \cdot 4\ cm^2$

$= \frac{8-4\ln 3}{3}\ cm^2$

Exercice 1 Partie B 6)



Exercice 2

$A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$; $C(-1;1;1)$

1) a) A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles

donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

d'où les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 2\cdot0+0\cdot(-1)+4 = 4$

c) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cdot\cos(\vec{AB},\vec{AC})$ $AB=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$

$4 = 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(\vec{AB};\vec{AC})$ $AC=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\cos(\vec{AB};\vec{AC}) = \frac{4}{2\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$\widehat{BAC} \approx 50{,}768° \approx 51°$

2) a) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) $\Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{AB}$ et $\vec{n}\perp\vec{AC}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{n}\cdot\vec{AB} &= 2\cdot2+(-1)\cdot0+(-1)\cdot4 = 4-4=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AB}\\ \vec{n}\cdot\vec{AC} &= 2\cdot0+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot1 = 1-1=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AC}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{n}\perp(ABC)$$

b) $(ABC) : 2x-y-z+d=0$

$C\in(ABC) \Rightarrow -2-1-1+d=0$

$d=4$

Donc le plan (ABC) a pour équation $2x-y-z+4=0$.

3) $(P_1) : 3x+y-2z+3=0$

(P_2) : $O\in(P_2)$ et (P_2) est parallèle au plan d'éq. $x-2z+6=0$

a) $O\in(P_2) \Rightarrow 0-2\cdot0+d=0$

$d=0$

donc (P_2) a pour équation $x-2z=0$

$\Leftrightarrow x=2z$

b) (P_1) et (P_2) sont sécants $\Leftrightarrow$ leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires

Un vecteur normal à (P_1) est $\vec{n_1}(3;1;-2)$.

Un vecteur normal à (P_2) est $\vec{n_2}(1;0;-2)$.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires.

c) $M(x,y,z) \in (\mathcal{D}) = (P_1) \cap (P_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-2z+3=0 \\ x=2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2t \\ 6t+y-2t+3=0 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=-3-4t \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

4) $I(x,y,z) \in (\mathcal{D}) \cap (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=-3-4t \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$ et $2x-y-z+4=0$

d'où $2\cdot(2t)-(-3-4t)-t+4=0$

$$7t=-7$$

$$t=-1$$

donc $I(-2;1;-1)$.

Sujet C - ex. 3

QCM

1° $z^3+(6-i)z^2+(25-6i)z-25i=0$

on pose : $z=i$

$-i+(6-i)\cdot(-1)+25i+6-25i=0$ donc i est une racine

$[z^3+(6-i)z^2+(25-6i)z-25i]=(z-i)(az^2+bz+c)$

$= az^3+bz^2+cz-iaz^2-ibz-ic$

$= az^3+(b-ia)z^2+(c-ib)z-ic$

donc $\begin{cases} a=1 \\ 6-i=b-ia \\ 25-6i=c-ib \\ -25i=-ic \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=6 \\ c=25 \end{cases}$

on résout l'équation : $z^2+6z+25=0$

$\Delta=36-4\cdot 25=-64$

$z_{1,2}=\dfrac{-6\pm 8i}{2}= \begin{cases} -3+4i \\ -3-4i \end{cases}$

donc la bonne réponse est : b

2° $z=-\dfrac{3}{1-i}=\dfrac{-3}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}=\dfrac{-3-3i}{2}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}i$

$|z|=\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$z=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}i=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}-i\,\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\Big(\underbrace{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\theta}-i\underbrace{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{\sin\theta}\Big)$

$\theta=-\dfrac{3}{4}\pi$

$z=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)\right]$ donc la bonne réponse est a

3° $z = (-\sqrt{3} - i)^{10}$

$z' = -\sqrt{3} - i \qquad |z'| = \sqrt{3+1} = 2$

$z' = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \qquad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{2} \quad \theta = -\frac{5}{6}\pi$

$\arg z' = -\frac{5}{6}\pi$ donc $\arg(z')^{10} = 10 \cdot \left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{50}{6}\pi$

$\arg(z')^{10} = -\frac{25}{3}\pi = -\frac{24}{3}\pi - \frac{\pi}{3} =$

$= -\frac{\pi}{3} + 4 \cdot (-2\pi)$

donc la bonne réponse est c

4° $C(i)$

rotation de centre $C(i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$:

$z' - i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot (z - i)$

$z' = -i(z - i) + i$

$z' = -iz - 1 + i$

$z' = -iz + i - 1$

donc la bonne réponse est c

5° $z' = \frac{z + 5i}{z - 3}$

$|z'| = 1 \iff \left|\frac{z+5i}{z-3}\right| = 1 \iff \frac{|z+5i|}{|z-3|} = 1$

$\iff |z + 5i| = |z - 3|$

$\iff AM = BM$ où $A(-5i)$, $B(3)$, $M(z)$

donc il s'agit de la médiatrice du segment [AB] donc une droite d

On a $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $v_n = 4u_n - 8n + 24 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1) $u_0 = 1$; $\boxed{u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{-1}{2}}$; $\boxed{u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{4}}$

$v_0 = 4u_0 - 8(0) + 24 = 4 + 24 = \boxed{28 = v_0}$

$v_1 = 4u_1 - 8(1) + 24 = -2 + 16 = \boxed{14 = v_1}$

$v_2 = 4u_2 - 8(2) + 24 = -1 + 8 = \boxed{7 = v_2}$

2) Démontrons que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \iff 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24)$

$\iff 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8n + 16 = 2u_n - 4n + 12$

$\iff 2u_n + 4n - 4 - 8n + 16 = 2u_n - 4n + 12$

$\iff 2u_n - 4n + 12 = 2u_n - 4n + 12$

$\iff$ VRAI.

3) $v_0 = 28$; $v_1 = \frac{v_0}{2}$; $v_2 = \frac{v_0}{2^2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{v_n = 28\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

4) $v_n = 4u_n - 8n + 24 \iff v_n + 8n - 24 = 4u_n \iff u_n = \frac{v_n + 8n - 24}{4}$

$\iff u_n = \frac{28\left(\frac{1}{2}\right)^n + 8n - 24}{4}$

$\iff \boxed{u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6}$

5) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{7\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0} + \underbrace{2n}_{\to +\infty} - \underbrace{6}_{\to 6} = +\infty$

Comme la limite n'est pas un nombre réel, la suite (u_n) n'est pas convergente.