MATURITA DES SECTIONS BILINGUES
FRANCO-TCHÈQUES ET FRANCO-SLOVAQUES

EXAMEN DE MATURITA BILINGUE

Année scolaire 2018-2019
Session de mai 2019

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4h

Le sujet est constitué de 4 exercices. Les quatre exercices sont obligatoires.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'emploi des instruments de dessin et de calcul, et l'utilisation du formulaire sont autorisés.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice n° 1
(sur 8,25 points)

Le plan est muni d´un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, unité graphique <u>*2cm*</u>.

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout *x* réel par : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$.

1. Montrer que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$.
2. Etudier le sens de variation de g . Calculer $g(0)$ et $g(-1)$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie pour tout *x* réel par : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$.

On appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = g(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.
4. a) Montrer que l´équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β sur R.

   b) Déterminer et justifier un encadrement de α et β à 10^{-1} près.
5. a) Montrer que la droite (D) d´équation $y = x + 3$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.

   b) Etudier, suivant les valeurs de *x*, la position relative de (D) et de $(\mathcal{C}_f)$.
6. Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (D).

Partie C

En utilisant une intégration par parties, calculer l´aire A , en cm^2, du domaine délimité par la droite (D), la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d´équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice n° 2
(sur 5,25 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendentes.

PARTIE A

On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (6 - i)z^2 + (25 - 6i)z - 25i$, où z est un nombre complexe.

1. Calculer $P(i)$.
   Interpréter le résultat.
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait : $\mathrm{P(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)}$.
3. En déduire les solutions de l´équation $\mathrm{P(z) = 0}$.

PARTIE B

Le plan complexe est muni d´un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d´unité graphique 1 cm.
On considère les points *A*, *B* et *C* d´affixes respectives:

$$z_A = -11 + 4i, z_B = -3 - 4i \text{ et } z_C = 5 + 4i \text{ .}$$

1. Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l´exercice.
2. a) Calculer le module et un argument du quotient $\frac{\mathrm{z_A - z_B}}{\mathrm{z_C - z_B}}$.
   b) Donner leur interprétation géométrique.
   c) En déduire la nature du triangle ABC.
3. Soit E l´image du point C par la rotation r de centre B et d´angle $\frac{\pi}{4}$.
   Montrer que l´affixe de E vérifie $\mathrm{z_E} = -3 + \left(8\sqrt{2} - 4\right)\mathrm{i}$.
   Placer le point E.
4. Soit F l´image du point A par une translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
   Déterminer l´affixe z_F du point
5. .
6. F.

Etudier la nature du quadrilatère ABCF

Exercice n° 3
(sur 4 points)

Dans l´espace muni du repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d´unité *1cm*.
On considère les points $A(3;\ 3;\ 5)$, $B(5;\ 1;\ 1)$, $C(1;\ 5;\ 3)$ et $D(5;\ 5;\ -1)$*).*

1. a) Écrire le système paramétrique d´équations de la droite (CD)
   b) Vérifier que $H(4;\ 5;\ 0)$ est un point de la droite (CD) .
   c) Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
   d) En déduire la distance du point *B* à la droite (CD).
   e) Montrer que l´aire du triangle *BCD* est égale à 12 cm^2.

2. a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point *A* et orthogonale au plan (BCD).
   c) Calculer les coordonnées du point I, intersection de la droite Δ et du plan *(BCD).*
   d) Calculer le volume du tetraèdre $ABCD$ en cm^3.

Exercice n° 4
(sur 2,5 points)

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Elsa a préparé un grand saladier de billes de chocolat pour son anniversaire. Il y a 50 billes au total.
On y trouve :

- 40 % de billes au chocolat blanc, les autres étant au chocolat noir;
- parmi les billes au chocolat blanc, 60 % sont fourrées au café; les autres sont fourrées au praliné;
- parmi les billes au chocolat noir, 70 % sont fourrées au café; les autres sont fourrées au praliné.

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs ci-dessous (aucune justification n'est demandée).

	Chocolat blanc	Chocolat noir	Total
Fourrée au café			
Fourrée au praliné			
Total			50

2. Un invité prend une bille de chocolat au hasard dans le saladier. Quelle est la probabilité que la bille soit fourrée au café ?

3. Henri prend au hasard trois billes simultanément.
   a) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux billes au chocolat blanc et une bille au chocolat noir fourrée au café ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une bille au chocolat blanc ?

4. Jeanne prend au hasard trois billes les unes après les autres.
Quelle est la probabilité que la première et la deuxième soient des billes au chocolat noir et la troisième une bille au chocolat blanc fourrée au praliné ?