SUJET B

Exercice 1

PARTIE A :

$$g(x) = 1 - e^{2x} - 2x \cdot e^{2x}$$

① $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \boxed{1}$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^{2x} = 0$ (formulaire)

② $g'(x) = -2 \cdot e^{2x} - 2 \cdot (e^{2x} + 2xe^{2x}) =$

$= -2e^{2x} - 2e^{2x} - 4x \cdot e^{2x} =$

$= -4e^{2x} - 4x \cdot e^{2x} = -4 \cdot e^{2x}(1 + x)$

x		-1		0	
$-4 \cdot e^{2x}$	$-$	|	$-$		
$1+x$	$-$	0	$+$		
$g'(x)$	$+$	0	$-$		
$g(x)$	$1 \nearrow$	$1+e^{-2}$	$\searrow$	0	$\searrow$

$g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$

$g(-1) = 1 - e^{-2} + 2e^{-2} =$

$= 1 + e^{-2}$

③

$g(x)$	$+$		0	$-$

PARTIE B :

$$f(x) = x + 3 - x \cdot e^{2x}$$

① $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = FI \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - e^{2x}) + 3 = \boxed{-\infty}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{2x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = FI \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} x(1 - e^{2x}) + 3 = \boxed{-\infty}$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - e^{2x}) = 1$

(2) $f'(x) = 1 - (1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2 \cdot e^{2x}) = 1 - e^{2x} - 2x \cdot e^{2x} = \boxed{g(x)}$ c.q.f.d. ?

(3)

x	$-\infty$		0		
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

$f(0) = 0 + 3 - 0 = 3$

(4.) sur $]-\infty, 0[$ $f(x)$ est dérivable donc continue
↳ est strictement croissante (monotone)
↳ change le signe
$\Rightarrow$ il existe une solution $\alpha \in]-\infty, 0[$
telle que $f(\alpha) = 0$

sur $]0, +\infty[$: $f(x)$ est dérivable donc continue
↳ est strictement décroissante
↳ change le signe
$\Rightarrow$ il existe une solution $\beta \in]0; +\infty[$
telle que $f(\beta) = 0$

Sur $\mathbb{R}$; il existe 2 solutions de $f(x) = 0$, ce sont α et β
et d'après la calculatrice :

$-3,1 < \alpha < -3$ $\qquad$ $0,7 < \beta < 0,8$

(5) On étudie la limite de $f(x) - y_D = x + 3 - xe^{2x} - (x+3) = -xe^{2x}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} -xe^{2x} = 0$ (d'après le formulaire

$\Rightarrow$ $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique $y = x + 3$ en $-\infty$.

	$-\infty$		0		∞
$-x$		$+$	0	$-$	
e^{2x}		$+$	1	$+$	
$f(x)-y_D$		$+$	0	$-$	

sur $]-\infty;0[$: $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (D)
sur $]0;+\infty[$: $(\mathscr{C})$ est au-dessous de (D)
en $x=0$: $(\mathscr{C})$ et (D) se coupent.

PARTIE C

sur $[0;1]$: $(\mathscr{C})$ est au-dessous de (D) $\Rightarrow$

$$A = \int_0^1 x\,e^{2x} = \left| \begin{matrix} v = x & u' = e^{2x} \\ v' = 1 & u = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[x\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx =$$

$$= \left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 0 - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2 =$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}(1+e^2)} \text{ unités d'aire}$$

$$= \frac{1}{4}(1+e^2)\cdot 4\ \text{cm}^2 = \boxed{1+e^2}\ \text{cm}^2$$

B

Exercice 2

PARTIE A $P(z) = z^3 + (6-i)z^2 + (25-6i)z - 25i$

1.) $P(i) = i^3 + (6-i)i^2 + (25-6i)i - 25i =$

$= -i - (6-i) + 25i - 6i^2 - 25i =$

$= -i - 6 + i + 6 = 0 \Rightarrow$

i est une racine de $P(z)$

on peut factoriser $P(z)$ par $(z-i)$

2.) $(z-i)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 i - biz - ci$

$= az^3 + z^2(b-ai) + z(c-bi) - ci$

$\Rightarrow \quad \boxed{a = 1} \qquad b - ai = 6-i \quad b - i = 6 - i \quad \boxed{b = 6} \qquad -c = -25 \quad \boxed{c = 25}$

3) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = i$ ou $z^2 + 6z + 25 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = -64 < 0$

$\Rightarrow z_{2,3} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i$

$\boxed{S = \{i, -3+4i, -3-4i\}}$

PARTIE B :

2.) $Z = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-11+4i+3+4i}{5+4i+3+4i} = \dfrac{-8+8i}{8+8i} \cdot \dfrac{8-8i}{8-8i} =$

$= \dfrac{-64+64i+64i+64}{64+64} = \dfrac{128i}{128} = \boxed{i}$

b.) $\Rightarrow |i| = 1 \Rightarrow \dfrac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_B|} = \dfrac{BA}{BC} = 1 \Rightarrow \boxed{AB = BC}$

$\arg z = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 90°}$

c.) $\Rightarrow \Delta ABC$ est rectangle et isocèle en B

B

3.) $z_E - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_C - z_B)$

$$z_E = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z_C - z_B\right) + z_B)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(5+4i+3+4i\right) - 3 - 4i =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(8+8i\right) - 3 - 4i =$$

$$= \cancel{4\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}i + 4\sqrt{2}i - \cancel{4\sqrt{2}} - 3 - 4i = \boxed{-3 + i(8\sqrt{2} - 4)}$$ c.q.f.d.

4.) $z_F = z_A + z_{\vec{BC}}$

$$= z_A + z_C - z_B$$

$$= -11 + 4i + 5 + 4i + 3 + 4i =$$

$$z_F = \boxed{-3 + 12i}$$

5.) $\vec{AF} = \vec{BC} \Rightarrow$ ABCF est un parallélogramme et lorsque $\triangle ABC$ est rectangle et isocèle $\Rightarrow$ deux côtés consécutifs de ABCF sont de même longueur et perpendiculaires $\Rightarrow$ <u>ABCF est un carré</u>.

EXERCICE 3

B

1. a.) (CD) : $\vec{CD}(4;0;-4) \Rightarrow$ et $C \in (CD)$

$$(CD) : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 5 \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b.) $H \overset{?}{\in} (CD) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{lll} 4 = 1 + 4t & \Rightarrow & t = \frac{3}{4} \\ 5 = 5 & \Rightarrow & t \in \mathbb{R} \\ 0 = 3 - 4t & \Rightarrow & t = \frac{3}{4} \end{array}\right\} t = t \Rightarrow \boxed{H \in (CD)}$$

c.) $\vec{BH}(4-5; 5-1; 0-1) = \vec{BH}(-1; 4; -1)$

$\vec{BH} \cdot \vec{CD} = -1 \cdot 4 + 4 \cdot 0 - 1 \cdot (-4) = -4 + 0 + 4 = 0$

$\Rightarrow \vec{BH} \perp \vec{CD} \Rightarrow \boxed{(BH) \perp (CD)}$

d.) $BH = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18}$ unités graphiques

e.) $A_{BCD} = \dfrac{CD \cdot BH}{2} = \dfrac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{18}}{2} = \dfrac{\sqrt{576}}{2} = \boxed{12 cm^2}$ $CD = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$

2. (BCD) : $\vec{BC}(1-5; 5-1; 3-1) = \vec{BC}(-4; 4; 2)$

$\vec{BD}(5-5; 5-1; -1-1) = \vec{BD}(0; 4; -2)$

$$\begin{array}{ccccc} -4 & 4 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 4 \end{array}$$

$\vec{BC} \wedge \vec{BD} = \vec{n}(-16; -8; -16)$ est le v. normal à (BCD)

$\Rightarrow$ (BCD) : $-16x - 8y - 16z + d = 0$

$B \in BCD$: $-16 \cdot 5 - 8 \cdot 1 - 16 \cdot 1 + d = 0$

$d = 104$

(BCD) : $-16x - 8y - 16z + 104 = 0 \quad | : (-8)$

$\boxed{BCD}$: $\boxed{2x + y + 2z - 13 = 0}$

b.) $n'(2;1;2)$ est le v. directeur de $(\Delta) \Rightarrow A \in (\Delta)$

$$(\Delta): \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = 3 + s \\ z = 5 + 2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

c.) $I \in (BCD) \cap (\Delta) \Rightarrow$

$$2\cdot(3+2s) + (3+s) + 2(5+2s) - 13 = 0$$
$$6 + 4s + 3 + s + 10 + 4s - 13 = 0$$
$$9s + 6 = 0$$
$$s = -\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow I(3+2s\ ;\ 3+s\ ;\ 5+2s)$

$\Rightarrow I\left(3-\frac{4}{3}\ ;\ 3-\frac{2}{3}\ ;\ 5-\frac{4}{3}\right) = I\left(\frac{5}{3}\ ;\ \frac{7}{3}\ ;\ \frac{11}{3}\right)$

d.) $V = \frac{1}{3}\ IA \cdot A_{BCD} =$

$= \frac{1}{3}\ 2 \cdot 12 = \frac{24}{3} = \boxed{8\ cm^3}$

$\vec{IA}\left(3-\frac{5}{3}\ ;\ 3-\frac{7}{3}\ ;\ 5-\frac{11}{3}\right)$

$\vec{IA} = \left(\frac{4}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right)$

$IA = \sqrt{\frac{16+4+16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = 2$

$A_{BCD} = \frac{\|BC \wedge BD\|}{2} = \frac{\sqrt{16^2+8^2+16^2}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{576}}{2} = 12\ cm$

B

EXERCICE 4

	blanc	Noir	Total
Fourrée au café	12	21	33
Fourrée au praliné	8	9	17
Total	20	30	50

(2) au hasard $\Rightarrow$ les événements sont équiprobables

$$\Rightarrow p_2 = \frac{C_{33}^1}{C_{50}^1} = \boxed{\frac{33}{50}}$$

(3) a.) simultanément $\Rightarrow$ l'ordre n'est pas important

$$p_3 = \frac{C_{20}^2 \cdot C_{21}^1}{C_{50}^3} = \frac{\frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 21}{\frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{2}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 21}{50 \cdot 49 \cdot 48} = \boxed{\frac{57}{280}}$$

b.) événement contraire $\Rightarrow$ pas de chocolat blanc

C_{30}^3

$$\Rightarrow p_3' = 1 - \frac{C_{30}^3}{C_{50}^3} = 1 - \frac{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!}}{\frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3!}} =$$

$$= 1 - \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{50 \cdot 49 \cdot 48} = 1 - \frac{29}{140} = \boxed{\frac{111}{140}}$$

(4) l'ordre est important

$$p_4 = \frac{A_{30}^2 \cdot 8}{A_{50}^3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 8}{50 \cdot 49 \cdot 48} = \boxed{\frac{29}{490}}$$