MATURITA DES SECTIONS BILINGUES
FRANCO-TCHÈQUES ET FRANCO-SLOVAQUES

EXAMEN DE MATURITA BILINGUE

Année scolaire 2019-2020
Session de mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4h

Le sujet est constitué de 4 exercices. Les quatre exercices sont obligatoires.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'emploi des instruments de dessin et de calcul, et l'utilisation du formulaire sont autorisés.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice n° 1
(sur 8 points)

Le but du problème est l´étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 2x}.$$

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d´un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d´unités graphiques *3 cm* sur l´axe des abscisses et *6 cm* sur l´axe des ordonnées.

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = e^x(2 - x) - 2$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$
2. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g.
   En déduire le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. a) Calculer $g(0)$.
   b) Démontrer que l´équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[1; 2]$.
   Donner un encadrement de α d´amplitude 10^{-2}.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B - Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x , on a: $f(x) = \frac{1 - 2e^{-x}}{1 - 2xe^{-x}}$.
3. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
4. Démontrer que la fonction dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par :
   $$f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x - 2x)^2}.$$
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Donner une équation de la tangente (t) au point d´abscisse 0.
7. Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

PARTIE C - Calcul d´aire

1. Sachant que pour tout x réel $e^x - 2x > 0$, déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On note *(S)* le domaine du plan délimité par la courbe (C_f) , l´axe des abscisses et les droites d’équation $x = 1$ et $x = 3$. Hachurer le domaine *(S)*.
3. Calculer, en unités d´aire, la valeur exacte de l’aire du domaine *(S)*.
   En déduire, en cm^2, une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire .

Exercice n° 2
(sur 4,5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

On considère l'équation $(E) : z^2 + z(i-2) + 1 - i = 0$ où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. Déterminer une solution réelle évidente de l'équation (E).
2. Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait : $(z-1)(az+b) = z^2 + z(i-2) + 1 - i$.

   En déduire l´autre solution de (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1, $2 + 2i$ et $1 - i$.

1. Représenter A, B et C. On complétera la figure au fur et à mesure de l´exercice.
2. Soit K l´image de C par l´homothétie de centre A et de rapport -4.

   Calculer l´affixe du point K.
3. Soit M l´image de B par la rotation de centre C et d´angle $\frac{\pi}{2}$.

   Calculer l´affixe du point M.
4. Soit L l´image de C par la translation de vecteur $\vec{u}$ d´affixe $-4 + 3i$.

   Calculer l´affixe du point L.
5. a) Calculer l´affixe du point I, le milieu du segment $[BL]$.

   b) Calculer l´affixe du point J, le milieu du segment $[KM]$.

   c) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $KBML$? Justifier.
6. Calculer le module et un argument du nombre $\frac{z_M - z_L}{z_K - z_L}$.

   Préciser la nature du quadrilatère $KBML$. Justifier.

Exercice n° 3
(sur 4 points)

Soit $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal direct de l´espace.
On considère les points $A(3;1;-5)$, $B(0;4;-5)$, $C(-1;2;-5)$ et $D(2;3;4)$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Les points A, B et D sont alignés.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d´équation $x + y = 4$.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.
5. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = \frac{7}{2} + t \\ z = -\frac{1}{2} - 9t \end{cases}$, $t \in R$ est une représentation paramétrique de la droite (BD).
6. L´angle entre la droite (BC) et le plan d'équation $x + 2y - \sqrt{15}z - 5 = 0$ est égal à $60°$.
7. Les droites (BC) et (d): $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 - \sqrt{15}t \end{cases}$, $t \in R$ sont orthogonales.
8. Le point $P\left(3 + 5\sqrt{15}; 4 - 5\sqrt{15}; -5\right)$ est le point d´intersection de la droite (AB) avec le plan d´équation $x + 2y - \sqrt{15}z - 5 = 0$.

Exercice n° 4
(sur 3,5 points)

On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de familles françaises possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année. Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de familles possédant un téléviseur à écran plat l'année *n*.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n > 0$: $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n)$.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près pour chacun des nombres suivants $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$.
2. Soit f la fonction définie sur [0 ; 20] par : $f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x)$.
   Étudier les variations de f sur [0 ; 20].
3. Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . On admet que ℓ vérifie l´équation $f(\ell) = \ell$.
   Déterminer ℓ.
6. En 2020, quel nombre de foyers français possèdant un téléviseur à écran plat peut-on envisager (arrondir au million près) ?