MATURITA DES SECTIONS BILINGUES
FRANCO-TCHÈQUES ET FRANCO-SLOVAQUES

EXAMEN DE MATURITA BILINGUE

Année scolaire 2020-2021
Session de mai 2021

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4h

Le sujet est constitué de 4 exercices. Les quatre exercices sont obligatoires.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'emploi des instruments de dessin et de calcul, et l'utilisation du formulaire sont autorisés.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice n° 1
(sur 7 points)

Le plan est muni d´un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, d'unité graphique <u>$1\ cm$</u>.

$(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-2x} - 4e^{-x} - 2x + 4\ .$$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3) Soit la droite (Δ) d´équation : $y = -2x + 4$.

   a) Montrer que la droite (Δ) est une asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

   b) Calculer les coordonnées de A, point d´intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et de (Δ).

   c) Déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de (Δ).
4) Montrer que, pour tout $\in \mathbb{R}, f'(x) = -2(e^{-x} - 1)^2$.
5) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
6) Montrer que l´équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; 2]$.

   Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
7) Déterminer une équation de la tangente (T) au point B d´abscisse 0.
8) Soit K le point de la courbe qui a pour abscisse α.

   Construire les droites (T), (Δ), la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les points A, B, K.
9) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -2x + 4 - f(x)$.

   a) Prouver que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} - 4e^{-x}$ est une primitive de la fonction de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

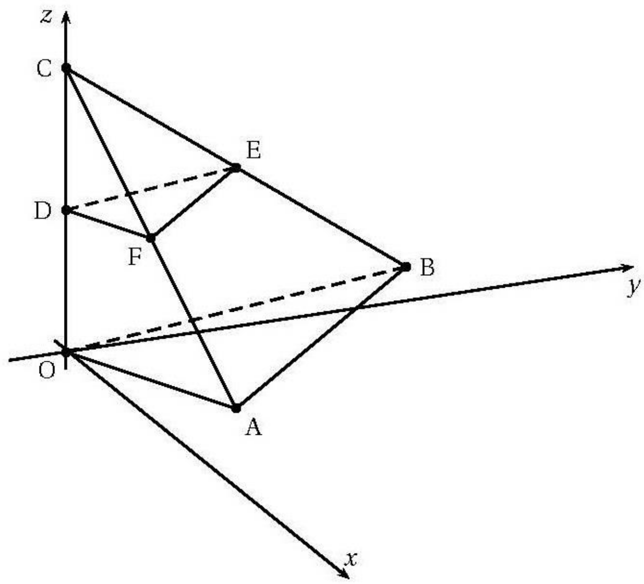
   b) Calculer l´intégrale $\int_{-\ln 4}^{0} g(x)\ dx$.

   c) Donner l'interprétation graphique de ce résultat en illustrant la réponse à l´aide du graphique.

Exercice n° 2
(sur 4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $A(10; 0; 1)$, $B(1; 7; 1)$ et $C(0; 0; 5)$.



1)
   a) Démontrer que les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.
   b) Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOB}$, arrondie au dixième.
2) Vérifier que $7x + 9y - 70z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).
3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CA).
4) Soit D le milieu du segment $[OC]$. Déterminer une équation du plan (P) parallèle au plan (OAB) passant par D.
5) Le plan (P) coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F.

   Déterminer les coordonnées du point F.

   On admet que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; 3\right)$.
6) Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).

Exercice n° 3
(sur 5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (-6+2i)z^2 + (25-12i)z + 50i$ où z est un nombre complexe.

1) Calculer $P(-2i)$.
2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait : $P(z) = (z+2i)(az^2 + bz + c)$.
3) En déduire les solutions de l´équation $P(z) = 0$.

PARTIE B

Le plan complexe est muni d´un repère orthonormal direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$ d´unité graphique $\mathbf{1cm}$.
On considère les points A, B, C et D d´affixes respectives:

$$z_A = 1\ ,\ z_B = 3+4i,\ z_C = 2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3})\ \text{et}\ z_D = -2\sqrt{3} + i(-2+\sqrt{3})\ .$$

1) Montrer que l´image du point B par la rotation de centre A et d´angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.
2) En déduire que les points B et D sont sur un cercle $(\mathcal{C})$ de centre A dont on déterminera le rayon.
3) Soit F l´image du point A par l´homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.
   a) Montrer que l´affixe z_F du point F est $-2i$.
   b) Montrer que le point F est le milieu du segment $[CD]$.
   c) Montrer que $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$.
      Donner un argument de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.
   d) Déduire des deux questions précédentes, ce que représente la droite (FA) pour le segment $[CD]$.
      En déduire la nature du triangle ACD.
4) Placer les points A, B et F.
   Construire le point D puis le point C.

Exercice n° 4
(sur 4 points)

Une petite ville dispose d´un service de location de vélos. On constate que, chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables car perdus, volés ou endommagés. Le budget du service lui permet de racheter 30 nouveaux vélos par an.

Le 1er janvier 2019, le parc contient 200 vélos utilisables. On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre de vélos le 1er janvier de l'année $2019 + n$.

La suite (u_n) est donc donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 200 \\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + 30 \end{cases}$.

1) Calculer le nombre de vélos au 1er janvier 2020 et au 1er janvier 2021.
2) Démontrer par récurrence que: (u_n) est minorée par 150.
3) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4) Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (u_n) ?
5) On definit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (v_n) par: $v_n = u_n - 150$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera sa raison et son premier terme.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c) Justifier, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 50 \cdot 0{,}8^n + 150$.
6) La municipalité a décidé de maintenir ce service de location tant que le nombre de vélos reste supérieur à 160.
   a) Résoudre l´inéquation $u_n \leq 160$ dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.
   b) En déduire en quelle année le service de location s'arrêtera.