EXERCICE n° 1 $\quad f(x) = e^{-2x} - 4e^{-x} - 2x + 4$

① $\lim_{x \to -\infty} f(x) = FI \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} e^{-x}(e^{-x} - 4) - 2x + 4 = \boxed{+\infty}$

car $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} (e^{-x} - 4) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (-2x + 4) = +\infty$

② $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$ car $\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} (-4e^{-x}) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} (-2x + 4) = -\infty$

③ a.) On étudie la limite de $f(x) - y_\Delta = (e^{-2x} - 4e^{-x} - 2x + 4) - (-2x + 4) = e^{-2x} - 4e^{-x}$

$\lim_{x \to +\infty} (e^{-2x} - 4e^{-x}) = \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} - \lim_{x \to +\infty} 4 \cdot e^{-x} = \boxed{0}$ car

$\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} 4e^{-x} = 0$

$\Rightarrow$ <u>$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique $(\Delta) : y = -2x + 4$ en $+\infty$</u>

b.) $f(x) = y_\Delta \Rightarrow e^{-2x} - 4e^{-x} - 2x + 4 = -2x + 4$

$e^{-2x} - 4e^{-x} = 0$

$e^{-x}(e^{-x} - 4) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0$ ou $e^{-x} - 4 = 0$

$\downarrow$ jamais

$e^{-x} = 4$

$\frac{1}{e^x} = 4$

$\frac{1}{4} = e^x$

$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = x$

$\Rightarrow x_A = -\ln 4$

$\Rightarrow y_A = -2 \cdot (-\ln 4) + 4$

$y_A = 4 + 2 \cdot \ln 4$

$\boxed{A(-\ln 4 ; 4 + 2\ln 4)}$

c.) on étudie le signe de $f(x) - y_\Delta = e^{-x}(e^{-x} - 4)$ :

| | $-\infty$ | | $-\ln 4$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-x}$ | | + | \| | + | |
| $e^{-x} - 4$ | | + | 0 | − | |
| $f(x) - y_\Delta$ | | + | 0 | − | |

Sur $]-\infty ; -\ln 4[$ : $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\Delta)$

Sur $]-\ln 4 ; +\infty[$ : $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de $(\Delta)$

en $x = -\ln 4$ : $(\mathcal{C}_f)$ et $(\Delta)$ se coupent

(4) $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$f'(x) = -2 \cdot e^{-2x} - 4 \cdot (-1) \cdot e^{-x} - 2 = -2 \cdot e^{-2x} + 4 \cdot e^{-x} - 2 =$$

$$= -2\left(e^{-2x} - 2 \cdot e^{-x} + 1\right) = \boxed{-2 \cdot \left(e^{-x} - 1\right)^2} \quad \text{c.q.f.d.}$$

(5)

| | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | | $-$ | ⋮ | $-$ | |
| $(e^{-x}-1)^2$ | | $+$ | 0 | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $-\infty$ |

$e^{-x} - 1 = 0$

$e^{-x} = 1$

$\frac{1}{e^{x}} = 1 \iff e^{x} = 1$

$x = \ln 1 = 0$

$x = 0$

(6) La fonction $f(x)$ est sur $\mathbb{R}$ :
* définie et dérivable
* strictement décroissante
* change le signe car

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty > 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0 \end{array}\right\} \text{il existe une unique solution } \alpha \text{ telle que } f(\alpha) = 0$$

Sur $[1;2]$ :

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = e^{-2} - 4e^{-1} - 2 + 4 \doteq 0{,}66 > 0 \\ f(2) = e^{-4} - 4 \cdot e^{-2} - 4 + 4 \doteq -0{,}52 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in [1;2]$$

d'après la calculatrice :

$$\left.\begin{array}{l} f(1{,}62) = 0{,}00757 > 0 \\ f(1{,}63) = -0{,}0053 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{1{,}62 < \alpha < 1{,}63} \Rightarrow \boxed{K(\alpha\,;0)}$$

(7) $(T)$ : $y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$ où : $f(0) = e^{0} - 4 \cdot e^{0} - 2 \cdot 0 + 4 = 1 - 4 + 4 = 1$

$y = 0(x - 0) + 1$ $\qquad f'(0) = -2 \cdot (e^{0} - 1)^2 = -2(1-1)^2 = 0$

$(T)$: $\boxed{y = 1}$

(9) a.) $G(x) = \frac{1}{2} e^{-2x} - 4 \cdot e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$G'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot e^{-2x} - 4 \cdot (-1) \cdot e^{-x} = -e^{-2x} + 4 \cdot e^{-x} = g(x) \quad \text{où}$$

$$g(x) = -2x + 4 - f(x) = (-2x+4) - \left(e^{-2x} - 4e^{-x} - 2x + 4\right) = -e^{-2x} + 4 \cdot e^{-x}$$

$\Rightarrow$ <u>G est la primitive de $g(x)$.</u>

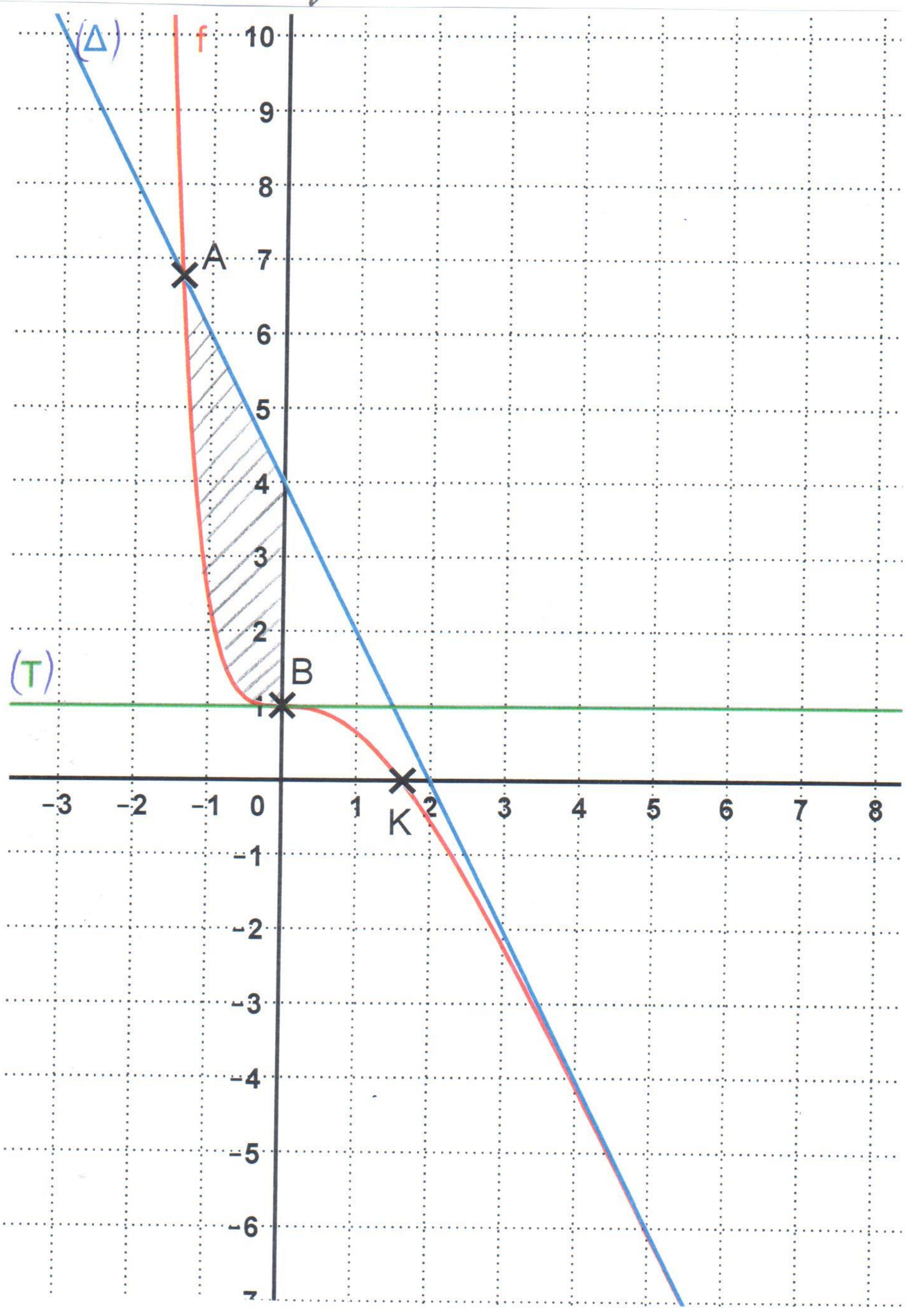
b.) $\int_{-\ln 4}^{0} g(x)\,dx = \left[G(x)\right]_{-\ln 4}^{0} = G(0) - G(-\ln 4) = \left(\frac{1}{2}e^{0} - 4\cdot e^{0}\right) - \left(\frac{1}{2}e^{2\ln 4} - 4e^{\ln 4}\right) =$

$= \left(\frac{1}{2}\cdot 1 - 4\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot e^{\ln 16} - 4\cdot e^{\ln 4}\right) =$

$= \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 16 - 4\cdot 4\right) = \left(-\frac{7}{2}\right) - \left(8 - 16\right) = \left(-\frac{7}{2}\right) - (-8) = 8 - \frac{7}{2} =$

$= \boxed{\frac{9}{2}}\ u.$

c.) Le résultat trouvé en 9b) correspond à l'aire de la partie hachurée en cm².
Autrement dit, c'est l'aire de la partie délimitée par la droite $(\Delta)$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[-\ln 4 ; 0]$.



EXERCICE 2

① a.) $\left.\begin{array}{l}\vec{OA}\ (10;0;1)\\ \vec{OB}\ (1;7;1)\end{array}\right\}$ $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 10\cdot 1 + 0\cdot 7 + 1\cdot 1 = 11 \neq 0$
$\Rightarrow \vec{OA} \not\perp \vec{OB} \Rightarrow \underline{(OA) \not\perp (OB)}$ c.q.f.d.

b.) $\cos \widehat{AOB} = \dfrac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{\|\vec{OA}\|\cdot\|\vec{OB}\|} = \dfrac{11}{\sqrt{10^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+7^2+1^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{101}\cdot\sqrt{51}} \doteq 0,153$

$\Rightarrow \boxed{\widehat{AOB} = 81,2°}$

② $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ ne sont pas colinéaires ⇒ définissent le plan (OAB)
$\Rightarrow \vec{n}(-7;-9;70) = \vec{OA} \wedge \vec{OB}$ est le vecteur normal à (OAB)

$$\begin{array}{ccccc}10 & 0 & 1 & 10 & 0\\ 1 & 7 & 1 & 1 & 7\end{array}$$

$\Rightarrow (OAB):\ -7x-9y+70z+d=0$
$O\in(OAB):\ -7\cdot 0 - 9\cdot 0 + 70\cdot 0 + d = 0$
$d=0$

$\Rightarrow (OAB):\ -7x-9y+70z=0 \quad |\cdot(-1)$
$\boxed{7x+9y-70z=0}$ c.q.f.d.

③ $\vec{CA}(10;0;-4)$ est le vecteur directeur de (CA) ; $C\in(CA)$

$\Rightarrow (CA): \begin{cases} x = 10t \\ y = 0 \\ z = 5-4t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$

④ $D(0;0;\frac{5}{2})$ est le milieu de [OC]
$\vec{n}(-7;-9;70)$ est le vecteur normal à (P) car $(P)\parallel(OAB) \Rightarrow$

$(P):\ -7x-9y+70z+d=0$
$D\in(P):\ -7\cdot 0 - 9\cdot 0 + 70\cdot\frac{5}{2} + d = 0$
$d=-175 \Rightarrow (P):\ -7x-9y+70z-175=0$
$\boxed{7x+9y-70z+175=0}$

⑤ $(P)\cap(CA)=F \Rightarrow F\in(CA) \Rightarrow F(10t;0;5-4t)$ pour un certain $t$
$F\in(P) \Rightarrow 7\cdot(10t)+9\cdot 0 - 70(5-4t)+175=0$
$70t-350+280t+175=0$
$350t=+175$
$t=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{F(5;0;3)}$

⑥ $\left.\begin{array}{l}\vec{EF}\left(\frac{9}{2};-\frac{7}{2};0\right)\\ \vec{AB}\ (-9;7;0)\end{array}\right\}$ Lorsque $-2\vec{EF}=\vec{AB}$,
alors $\vec{AB}$ et $\vec{EF}$ sont colinéaires

$\Rightarrow \boxed{(AB)\parallel(EF)}$

EXERCICE 3 $\quad P(z) = z^3 + (-6+2i)z^2 + (25-12i)z + 50i$

PARTIE A : (1) $P(-2i) = (-2i)^3 + (-6+2i)(-2i)^2 + (25-12i)(-2i) + 50i =$

$= 8i - 4(-6+2i) - 2i(25-12i) + 50i =$

$= 8i + 24 - 8i - 50i - 24 + 50i = 0$

$\Rightarrow$ $-2i$ est une racine de $P(z)$

$\Rightarrow$ on peut factoriser $P(z)$ par $(z+2i)$

(2) $P(z) = (z+2i)(az^2+bz+c) =$

$= az^3 + z^2(b+2ai) + z(c+2bi) + 2ci$

$\boxed{a=1}$ $\quad b+2ai = -6+2i \quad \boxed{b=-6}$ $\quad 2ci = 50i \quad \boxed{c=25}$

(3) $P(z) = (z+2i)(z^2-6z+25) = 0$

$\Leftrightarrow$ $z+2i = 0$ ou $z^2-6z+25=0$

$z_1 = -2i$ $\quad \Delta = b^2-4ac = 36-4\cdot1\cdot25 = -64$

$z_{2,3} = \dfrac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}\, i}{2a} = \dfrac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$

$\boxed{S = \{-2i ; 3+4i ; 3-4i\}}$

PARTIE B

(1) $r$ : $z' - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A)$

$z' = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(z_B - z_A) + z_A$

$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3+4i-1) + 1 =$

$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+4i) + 1 =$

$= -1 + \sqrt{3}i - 2i - 2\sqrt{3} + 1 = -2\sqrt{3} + i(\sqrt{3}-2) = z_D$ c.q.f.d.

(2) B, D sont les points qu'on utilise dans la rotation $\Rightarrow$

$AB = AD = r \Rightarrow AB = |z_B - z_A| = |3+4i-1| = |2+4i| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} =$

$= 2\sqrt{5}$ u.g. $\Rightarrow \boxed{r = 2\sqrt{5} \text{ u.g.}}$

(3) a.) $z' - z_B = \frac{3}{2}\cdot(z_A - z_B)$

$z' = \frac{3}{2}(1-3-4i) + 3+4i = \frac{3}{2}(-2-4i) + 3+4i$

$z' = -3-6i+3+4i = \boxed{-2i}$ c.q.f.d.

b.) Soit $I$ le milieu de $[CD]$ $\Rightarrow$

$$z_I = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3}) + (-2\sqrt{3}) + i(-2+\sqrt{3})}{2} = \frac{i(-2-\sqrt{3}-2+\sqrt{3})}{2} =$$

$$= \frac{-4i}{2} = -2i = \boxed{z_F} \quad \text{c.q.f.d.}$$

c.) $$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3}) + 2i}{1+2i} = \frac{2\sqrt{3} + i(-\sqrt{3})}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + i(-\sqrt{3}) + 2(-\sqrt{3}) - 4\sqrt{3}\,i}{1-4i^2} = \frac{i(-\sqrt{3}-4\sqrt{3})}{1+4} = \frac{-5\sqrt{3}\,i}{5}$$

$$= \boxed{-\sqrt{3}\,i} \quad \text{c.q.f.d.}$$

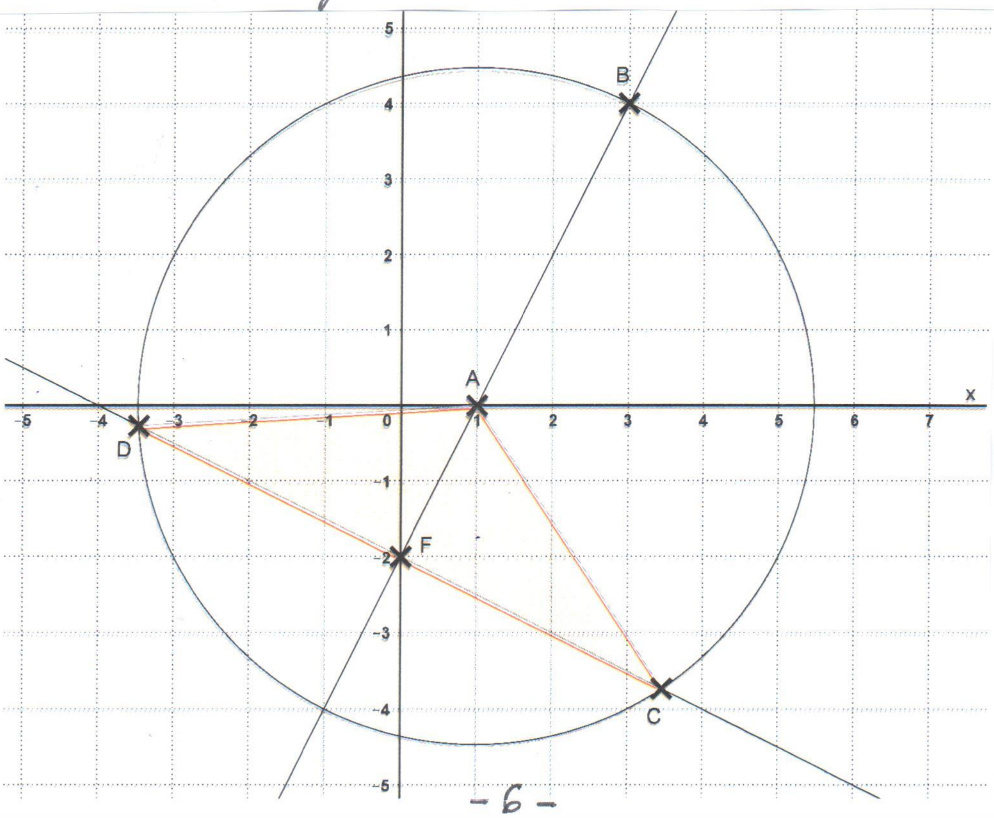
$$\Rightarrow \left|\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}\right| = |-\sqrt{3}i| = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\frac{FC}{FA} = \sqrt{3}}$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}\right) = \alpha : \quad \left.\begin{array}{l}\cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -i\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{(\vec{FA}\,;\vec{FC}) = -\frac{\pi}{2}}$$

d.) $\Rightarrow \boxed{(FA) \perp (FC)}$ $\rightarrow$ $[FA]$ est une médiatrice de $[CD]$.

car $(FA) \perp (CD)$ et passe par le milieu de $[CD]$.

En plus, lorsque $[FA]$ est une médiatrice de $[CD]$ ; alors $ADC$ est un triangle isocèle en $A$.



EXERCICE 4

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 200 \\ u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 30 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(1) 1.1.2020 : $u_1 = 0{,}8 \cdot u_0 + 30 = 0{,}8 \cdot 200 + 30 = \boxed{190}$

1.1.2021 : $u_2 = 0{,}8 \cdot u_1 + 30 = 0{,}8 \cdot 190 + 30 = \boxed{182}$

(2) $P_n$ : „ $u_n \geq 150$ "

I. Initialisation : $u_0 = 200 \geq 150 \Rightarrow P_0$ est vrai

II. Hérédité : Supposons que $P_n$ est vrai pour un certain $n$,

alors que $u_n \geq 150$ : $| \cdot 0{,}8$

$0{,}8 \cdot u_n \geq 150 \cdot 0{,}8 \quad | + 30$

$0{,}8 u_n + 30 \geq 150 \cdot 0{,}8 + 30$

$u_{n+1} \geq 150 \Rightarrow P_{n+1}$ est vrai

III. Conclusion : $P_0$ est vrai et $P_n$ est héréditaire, alors $P_n$ est vrai pour $\forall n \in \mathbb{N}$, autrement dit, pour $\forall n \in \mathbb{N}$ $(u_n)$ est minorée par 150.

(3) $u_{n+1} - u_n = 0{,}8 u_n + 30 - u_n = -0{,}2 u_n + 30 = -0{,}2(u_n - 150)$

et lorsque $u_n \geq 150$

$u_n - 150 \geq 0 \quad | \cdot (-0{,}2)$

$-0{,}2(u_n - 150) \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$

$u_{n+1} \leq u_n$

$\Rightarrow$ $(u_n)$ est décroissante pour $\forall n \in \mathbb{N}$.

(4) $(u_n)$ est minorée et décroissante, alors $(u_n)$ est convergente,

$\Rightarrow$ il existe une limite $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = l$

(5) $v_n = u_n - 150$

a.) $v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 0{,}8 u_n + 30 - 150 = 0{,}8 u_n - 120 = 0{,}8(u_n - 150)$

$v_{n+1} = 0{,}8 \cdot v_n \Rightarrow \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0{,}8 \Rightarrow$ $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et avec le premier terme $v_0 = 50$.

$v_0 = u_0 - 150 = 200 - 150 = 50$

b.) $v_n = v_0 \cdot q^n \Rightarrow \boxed{v_n = 50 \cdot (0{,}8)^n}$

c.) $u_n = v_n + 150 \Rightarrow \boxed{u_n = 50 \cdot (0{,}8)^n + 150}$ c.q.f.d.

6 a.) $u_n \leq 160 \Rightarrow 50 \cdot 0{,}8^n + 150 \leq 160$

$$50 \cdot 0{,}8^n \leq 10$$

$$0{,}8^n \leq \frac{1}{5} \qquad | (\ln(x)) \ ?$$

$$\ln(0{,}8)^n \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$n \cdot \ln(0{,}8) \leq \ln(0{,}2)$$

$$n \geq \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}8)} = 7{,}21$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 8}$$

b.) $u_0 = 1.1.2019$

$u_1 = 1..1.2020 \Rightarrow u_8 = 1.1.2027$

<u>Le service de location s'arrêtera en 2027.</u>