5e/6e année ***décembre 2020*** ***durée : 4 x 60 min***

PROPOSITION

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

CONTRÔLE COMMUN N°1

Exercice n°1

(sur 6,75 points)

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^2e^x + 8xe^x + 8e^x + 4$.

1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha \cdot e^x = 0$, si $\alpha > 0$.)
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée de $g(x)$ est $g'(x) = 2e^x(x+4)(x+2)$.
3) Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de g.
4) Calculer $g(-2)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$ par : $f(x) = \frac{2xe^x-4}{x+4}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) Déterminer les limites de f en -4^- et en -4^+.
2) Interpréter graphiquement les résultats des questions 1a) et 1b).
3) Prouver que pour tout $x \in D_f$, on a $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+4)^2}$.
4) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5) Donner l'équation de la tangente (t) à la courbe (C_f) en $x = 0$.
6) On admet que le signe de la différence $D(x) = f(x) - (0{,}75x - 1)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-4		$-2{,}4$		0		$+\infty$
Signe $D(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$+$	

   Que peut-on déduire pour la position relative de la courbe (C_f) et de la tangente (t) ?
7) Tracer la courbe (C_f) et la droite (t) ainsi que les asymptotes éventuelles.

Exercice n°2

(sur 5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère deux droites (d_1) et (d_2) définies par les représentations paramétriques :

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } (d_2): \begin{cases} x = -5 + 2s \\ y = -1 + s \\ z = 5 \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

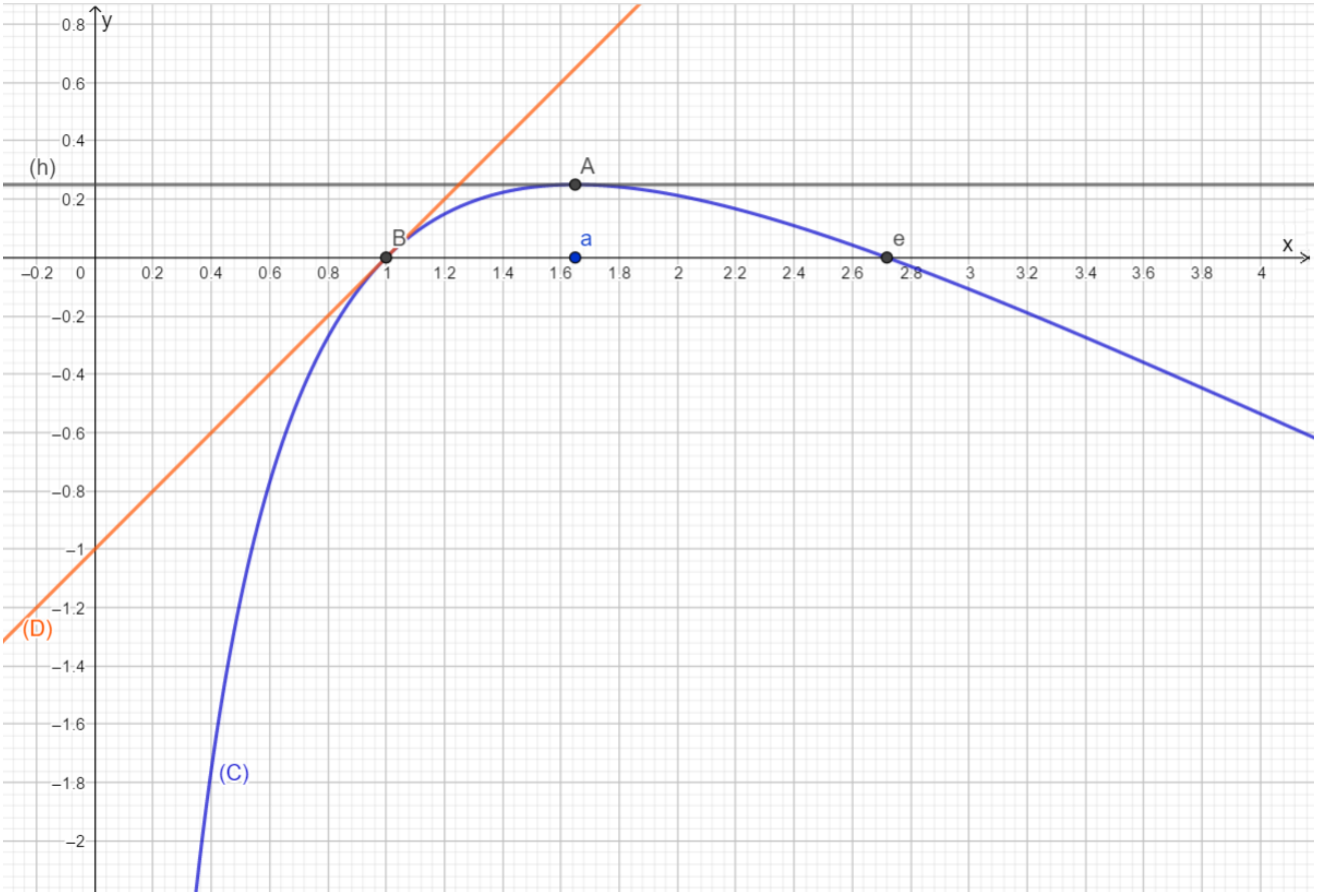
Le but de cet exercice est de déterminer, **si elle existe, une troisième droite (Δ) qui soit à la fois sécante avec les deux droites (d_1) et (d_2) et orthogonale à ces deux droites**.

1) Vérifier que le point $A(2; 3; 0)$ appartient à la droite (d_1).
2) Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite (d_1) et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite (d_2). Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ?
3) Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1; -2; -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
4) Soit (π) le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.
   a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (π) est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.
   b) Montrer que la droite (d_2) coupe le plan (π) au point $B(3 ; 3 ; 5)$.
5) On considère maintenant la droite (Δ) de vecteur directeur $\vec{v}(1; -2; -3)$, et passant par le point $B(3 ; 3 ; 5)$.
   a) Donner une représentation paramétrique de cette droite (Δ).
   b) Les droites (d_1) et (Δ) sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
6) Expliquer pourquoi la droite (Δ) accomplit le but de cet exercice.

Exercice n°3

(sur 3,75 points)

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère orthonormal, la courbe représentative (C) d´une fonction f définie sur $]0,+\infty[$.



On précise que :

- Le nombre a est tel que $f(a)=\frac{1}{4}$ est le maximum global de f (et l'unique extremum de f).
- L´axe des ordonnées est asymptote à la courbe (C) en 0.
- La tangente à la courbe (C) au point A d´abscisse a est parallèle à l´axe des abscisses.
- (D) est la tangente à la courbe (C) au point B de coordonnées $(1;0)$.

1. En utilisant le graphique et les renseignements donnés ci-dessus :

   a) Préciser $f(1)$, $f(e)$, $f'(1)$ et $f'(a)$.
   b) Donner la limite de f en 0.
   c) Préciser le sens de variation de f ; dresser son tableau de variation.

2. La fonction f est définie par $f(x)=p(\ln x)+q(\ln x)^2+r$ où p,q,r sont trois réels.

   a) En utilisant $f(1)$, calculer r.
   b) En utilisant $f(e)$, montrer que $p=-q$.
   c) Démontrer que $f'(x)=\frac{p}{x}-\frac{2p\ \ln x}{x}$.
   d) En utilisant $f'(1)$, calculer p et q. En déduire $f(x)$ et $f'(x)$.
   e) En utilisant $f'(a)$, calculer la valeur de a.

Exercice n°4
(sur 4,5 points)

QCM - Les questions de cet exercice sont indépendantes. Noter sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie et donner la justification de cette réponse. Exactement une réponse est correcte.
Une réponse sans justification ne rapporte pas de points.

1. La forme algébrique de $\frac{-5+i}{3+2i}$. Est :

   a) $1+i$ b) $1-i$ c) $-1+i$ d) $-1-i$

2. Soit $z_1=\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ est :

   a) $\frac{7\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{12}$ c) $\frac{19\pi}{12}$ d) $\frac{13\pi}{12}$

3. Soit A, B et C des points du plan dont les affixes sont $z_A=-3+i$, $z_B=-1-2i$ et $z_C=4+3i$. L'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme est :

   a) $z_D=6$ b) $z_D=-8-4i$ c) $z_D=2+6i$ d) $z_D=6+2i$

4. L'ensemble des solutions complexes de l'équation $-2z^2+3z-\frac{25}{8}=0$ est :

   a) $\left\{\frac{3-\sqrt{34}}{4}, \frac{3+\sqrt{34}}{4}\right\}$ b) $\left\{\frac{3}{4}+i, \frac{3}{4}-i\right\}$ c) $\left\{\frac{3}{2}+2i, \frac{3}{2}-2i\right\}$ d) l'ensemble vide

5. On désigne par A, B et C les points du plan d'affixes respectives $z_A=-1$, $z_B=2+i\sqrt{3}$ et $z_C=2-i\sqrt{3}$. Le triangle ABC est :

   a) rectangle b) isocèle non équilatéral c) équilatéral d'aire $3\sqrt{3}$ d) équilatéral d'aire $6\sqrt{6}$

6. On considère le nombre complexe $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. La forme algébrique de z^{2020} est :

   a) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $1010+i1010\sqrt{3}$ d) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. Le nombre $\frac{3+i}{1-i}$ a pour conjugué :

   a) $\frac{1+i}{3-i}$ b) $1-2i$ c) $-1+2i$ d) $\frac{3-i}{1+i}$

Barème :

Exercices	Question		Points accordés
1	A	1	/0,5
		2	/0,75
		3	/0,5
		4	/0,5
	B	1a)	/0,5
		1b)	/0, 5
		2	/0,5
		3	/0,5
		4	/0,75
		5	/0,5
		6	/0,25
		7	/1
Total			**/6,75**
2		1	/0,5
		2	/0,75
		3	/0,5
		4a)	/1
		4b)	/0,5
		5a)	/0,5
		5b)	/0, 75
		6	/0,5
Total			**/5**
3		1a)	/1
		1b)	/0, 25
		1c)	/0,5
		2a)	/0, 25
		2b)	/0, 5
		2c)	/0, 5
		2d)	/0,5
		2e)	/0,25
Total			**/3,75**
4		1	/0, 5
		2	/0, 5
		3	/0, 5
		4	/0,75
		5	/0,75
		6	/0,5
		7	/0,1
Total			**/4, 5**
TOTAL			**/20**