Exercice 1 – Étude d'une fonction

PARTIE A : $g(x) = 2x^2e^x + 8xe^x + 8e^x + 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\underbrace{2x^2e^x}_{+\infty\cdot(+\infty)} + \underbrace{8xe^x}_{+\infty\cdot(+\infty)} + \underbrace{8e^x}_{+\infty} + 4) = \underline{\underline{+\infty}}$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha \cdot e^x \quad \alpha > 0$

0,5 $\lim\limits_{x \to -\infty} (\underbrace{2x^2e^x}_{0} + \underbrace{8xe^x}_{0} + \underbrace{8e^x}_{0} + 4) = \underline{\underline{4}}$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^2 \cdot e^x = 0$ (formulaire)

et $\lim\limits_{x \to -\infty} 8x \cdot e^x = 0$ (form.)

2) $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = \underbrace{2x^2}_{u}\underbrace{e^x}_{v} + 8xe^x + 8e^x + 4$

0,75 $g'(x) = 4x \cdot e^x + 2x^2 \cdot e^x + 8e^x + 8x \cdot e^x + 8e^x =$

$= 2e^x(2x + x^2 + 4 + 4x + 4) =$

$= 2e^x(x^2 + \underbrace{6}_{4+2}x + \underbrace{8}_{4\cdot 2}) = \underline{\underline{2e^x(x+4)\cdot(x+2)}}$ c.q.f.d.

3)

0,5

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$2e^x$		$+$		$+$		$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	4	$\nearrow$	$g(-4)$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$+\infty$

→ car $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

4) $g(-2) = 2(-2)^2 \cdot e^{-2} + 8\cdot(-2)\cdot e^{-2} + 8 \cdot e^{-2} + 4 =$

$= \underline{8e^{-2}} - 16e^{-2} + \underline{8e^{-2}} + 4 = 4$

0,5 $\underline{\underline{g(-2) = 4}}$

La fonction admet un seul minimum en $x = -2$ de valeur $g(-2) = 4$.
En plus la limite en $-\infty$ est aussi 4.
On en déduit que $g(x) \geq 4 \ \forall x \in \mathbb{R}$, donc le signe est $\underline{\underline{g(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}}}$

PARTIE B) : $f(x) = \dfrac{2x\cdot e^x - 4}{x+4}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

1) a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2xe^x-4}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\cdot(\overbrace{2e^x}^{\to+\infty} - \overbrace{\tfrac{4}{x}}^{\to 0})}{\cancel{x}(1+\underbrace{\tfrac{4}{x}}_{\to 0})} = \text{“}\frac{+\infty}{1}\text{”} = \underline{\underline{+\infty}}$

0,5

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{2xe^x}^{0}-4}{x+4} = \text{“}\frac{-4}{-\infty}\text{”} = \underline{\underline{0^+}}$ car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2\cdot xe^x = 0$ (formulaire)

b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-4^- \\ x<-4}} \frac{2xe^x-4}{\underbrace{x+4}_{0^-}} \xrightarrow{} -\frac{8}{e^4}-4<0 = \text{“}\frac{-k}{0^-}\text{”} = \underline{\underline{+\infty}}$

0,5

$\displaystyle\lim_{x\to-4^+} \frac{2e^x-4}{\underbrace{x+4}_{0^+}} \xrightarrow{} -\frac{8}{e^4}-4<0 = \text{“}\frac{-k}{0^+}\text{”} = \underline{\underline{-\infty}}$

2) Car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'éq. $y=0$ au voisinage de $-\infty$.

0,5 Car $\displaystyle\lim_{x\to-4} f(x) = \pm\infty$, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale en $x=-4$.

3) $\forall x \in D_f$: $f(x) = \dfrac{2x\cdot e^x - 4 \to u}{x+4 \to v}$ $\quad u' = 2e^x + 2x\cdot e^x$

0,5 $\quad f'(x) = \dfrac{(2e^x+2xe^x)(x+4) - (2xe^x-4)\cdot 1}{(x+4)^2} = \dfrac{2xe^x + 8e^x + 2x^2e^x + 8xe^x - 2xe^x + 4}{(x+4)^2} =$

$= \underline{\underline{\dfrac{2x^2e^x + 8xe^x + 8e^x + 4}{(x+4)^2} = \dfrac{g(x)}{(x+4)^2}}}$ c.q.f.d.

4)

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$g(x)$		$+$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0^+	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

0,75

5) Tangente : $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ en $x_0 = 0$

0,5

$$y - \frac{2\cdot 0\cdot e^{0} - 4}{0+4} = \frac{0+0+8\cdot e^{0}+4}{4^2}\cdot(x-0)$$

$$y - (-1) = \frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{16}_{\,4}}\cdot x$$

$$\underline{\underline{(t) : y = \frac{3}{4}x - 1}}$$

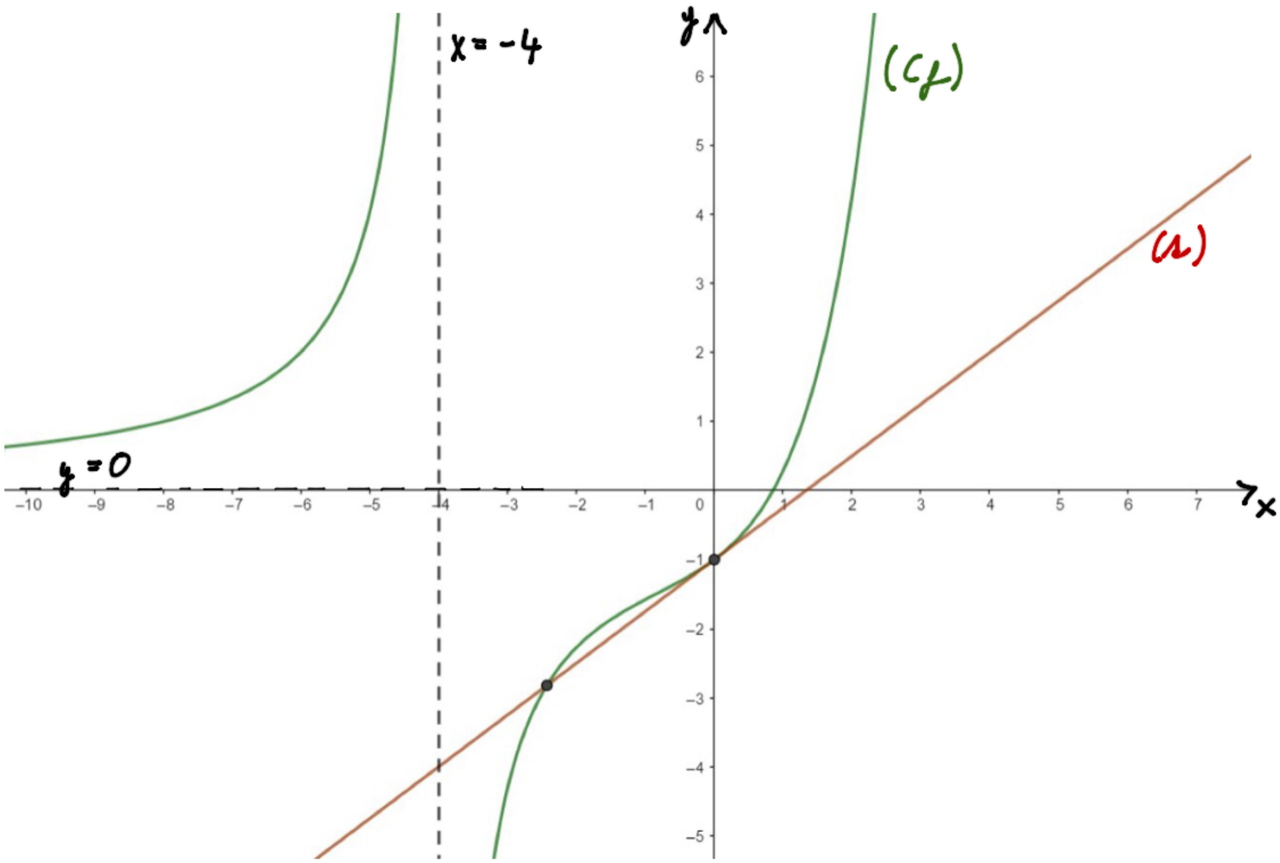
6) La position relative de (C_f) et (t) dépend du signe de $D(x)$, selon le tableau, on a alors :

- → $\forall x \in \,]-\infty ; -4[$ la courbe (C_f) se trouve au-dessus de (t)
- 0,25 → $\forall x \in \,]-4 ; -2{,}4[$ —"— au-dessous de (t)
- → $\forall x \in \,]-2{,}4 ; +\infty[\, \setminus \{0\}$ —"— au-dessus de (t)
- → pour $x \in \{-2{,}4 ; 0\}$ la courbe (C_f) intersecte la droite (t)

7) f :

x	-9	-8	-6	-5	-3	-2	-2,4	-1	0	1	2	3
y	0,8	1	2,0	4,1	-4,3	-2,3	-2,8	-1,6	-1	0,3	4,3	16,6

1



Exercice 2 - Espace

$(d_1): \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}$ $(d_2): \begin{cases} x = -5+2s \\ y = -1+s \\ z = 5 \end{cases}$, $t, s \in \mathbb{R}$

1) $A \in (d_1) \iff (2;3;0)$ vérifient $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}$

$\left.\begin{array}{ll} 2 = 2+t & \to t = 0 \\ 3 = 3-t & \to t = 0 \\ 0 = t & \checkmark \end{array}\right\}$ donc $\underline{A \in (d_1)}$ 0,5

2) $\underline{\vec{u}_1(1;-1;1),\ \vec{u}_2(2;1;0)}$ 0,75

$(d_1) \parallel (d_2) \iff \vec{u}_1 = k \cdot \vec{u}_2$

$\left.\begin{array}{lll} 1 = k\cdot 2 & & \\ -1 = k\cdot 1 & \to & k = -1 \\ 1 = k\cdot 0 & \to & k = 0 \end{array}\right\}$ il n'existe pas un seul $\underline{k}$, on a donc $\vec{u}_1 \neq k \cdot \vec{u}_2$

et les droites ne sont pas parallèles

3) $\vec{v}(1;-2;-3) \perp \vec{u}_1 \iff \vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0$ 0,5

$1\cdot 1 + (-2)(-1) + (-3)\cdot 1 = 1+2-3 = 0 \checkmark$

$\vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 2 - 2 + 0 = 0 \checkmark$

Vecteur $\vec{v}$ est orthogonal avec $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

4) a) $\vec{n}_{(\pi)} = \vec{u}_1 \wedge \vec{v} = (5;4;-1)$

$\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & -2 \end{array}$

$(\pi): ax + by + cz + d = 0$

$5x + 4y - z + d = 0$ 1

$A \in (\pi): 10 + 12 - 0 + d = 0$

$d = -22$

$\underline{(\pi): 5x + 4y - z - 22 = 0}$

c.q.f.d.

b) On cherche l'intersection de (d_2) et (π) - on résout l'équation : $5\cdot(-5+2s)+4(-1+s)-(5)-22=0$

$$-25+10s-4+4s-27=0$$
$$14s=56$$
$$\underline{s=4} \rightarrow \begin{cases} x=-5+8=\underline{3} \\ y=-1+4=\underline{3} \\ z=\underline{5} \end{cases}$$

0,5

Le point $B(3;3;5)$ est bien l'intersection de (d_2) et (π).

5) a) (Δ) : $\begin{cases} x=3+k \\ y=3-2k \\ z=5-3k \end{cases}, k\in\mathbb{R}$

0,5

b) On cherche l'intersection de (d_1) et (Δ) :

$\begin{cases} 2+s=3+k \\ 3-s=3-2k \\ s=\underline{5-3k} \end{cases}$ $\begin{cases} 2+s=3+k \\ s=5-3k \\ 5k=5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2+s=3+k \\ \underline{s=2} \\ \underline{k=1} \end{cases}$?

$\begin{cases} 2+s=3+k \\ 3-5+3k=3-2k \\ s=5-3k \end{cases}$ $\begin{cases} 2+s=3+k \\ s=5-3k \\ \underline{k=1} \end{cases}$ $\begin{matrix} 2+2 \overset{?}{=} 3+1 \\ 4=4 \ ✓ \end{matrix}$

0,75

Les droites (d_1) et (Δ) sont sécantes en point $M(4;1;2)$.

6) La droite (Δ) est dirigée par le vecteur $\vec{v}$ qui est orthogonal aux vecteurs $\vec{u_1}$ et u_2

→ donc (Δ) est orthogonale à (d_1) et aussi à (d_2).

D'après les question précédentes

→ les droites (Δ) et (d_1) sont sécantes en M

→ les droites (Δ) et (d_2) sont sécantes en B.

En peut conclure que (Δ) est perpendiculaire aux droites (d_1) et (d_2), voilà pourquoi elle réponde au problème posé.

0,5

Exercice n°3

1.a) $f(1)=0$ $\qquad f(e)=0$ $\qquad f'(1)=1$ $\qquad f'(a)=0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

c) La fonction f est strictement croissante sur $]0,a[$ et strictement décroissante sur $]a,+\infty[$. Elle admet son maximum en a.

x	0		a		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$		$f(a)$		$-\infty$

2. $f(x) = p\ln x + q(\ln x)^2 + r \quad ; \ p,q,r\in\mathbb{R}$

a) $f(1)=0 = p\underbrace{\ln 1}_{0} + q(\underbrace{\ln 1}_{0})^2 + 0 = r$ alors $r=0$

b) $f(e)=0 = p\underbrace{\ln e}_{1} + q(\underbrace{\ln e}_{1})^2 + 0 = p+q$ alors $p=-q$

c) $f'(x) = \dfrac{p}{x} + 2\underbrace{q}_{-p \text{ d'après b)}}\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{p}{x} - 2p\ln x\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{p}{x} - \dfrac{2p\ln x}{x}$

d) $f'(1)=1 = \dfrac{p}{1} - \dfrac{2p\overbrace{\ln 1}^{=0}}{1} = p$ alors $p=1$ et $q=-1$

On en déduit que $\boxed{f(x) = \ln x - (\ln x)^2}$ et $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2\ln x}{x}}$

e) $f'(a) = 0 = \dfrac{1}{a} - \dfrac{2\ln a}{a} = \dfrac{1-2\ln a}{a}$ ssi $1-2\ln a = 0$

$2\ln a = 1$

$\ln a = \dfrac{1}{2}$

$a = e^{1/2} = \sqrt{e} \sim 1{,}6$

Exercice n° 4 - Nombres Complexes

1) $\dfrac{-5+i}{3+2i} \cdot \dfrac{3-2i}{3-2i} = \dfrac{-15+10i+3i+2}{9+4} = \dfrac{-13+13i}{13} = \underline{\underline{-1+i}}$ 0,5

C

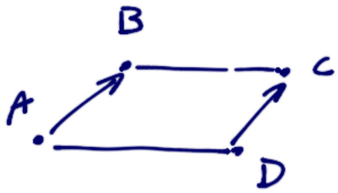
2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{6}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{\dfrac{6}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}\cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{12}}$ 0,5

$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \underline{\underline{\dfrac{7\pi}{12}}}$ A

3) $z_A = -3+i$

$z_B = -1-2i$

$z_C = 4+3i$



$\Longleftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$ 0,5

$z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

$\Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$

$z_D = 4+3i+1+2i-3+i$

$\underline{\underline{z_D = 2+6i}}$ C

4) $-2z^2 + 3z - \dfrac{25}{8} = 0$

$\Delta = 9 - 4\cdot(-2)\cdot\left(-\dfrac{25}{8}\right)$

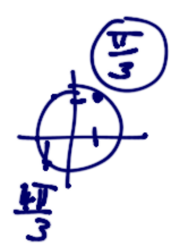
$\Delta = 9 - 25 = -16$

$\sqrt{\Delta} = i4$

$z_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 4i}{-2\cdot 2} = \underline{\underline{\dfrac{3}{4} \pm i}}$ B 0,75

5) $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $|z| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = 1$

$\arg(z)$: $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{1}{2}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}$



$z^{2020} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2020}$

$= e^{i\frac{2020\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

2020 : 6 = 336
22
40
4

0,75

$\underline{\underline{z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}}$ D

6) $\overline{\left(\frac{3+i}{1-i}\right)} = \frac{\overline{(3+i)}}{\overline{(1-i)}} = \frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i-1}{1+1} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$

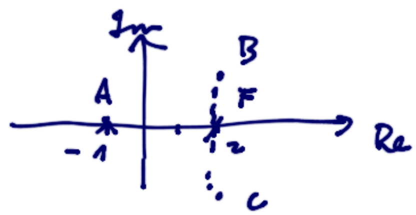
B

0,5

7) $z_A = -1$

$z_B = 2 + i\sqrt{3}$

$z_C = 2 - i\sqrt{3}$



$$\left.\begin{aligned} AB &= \|\vec{AB}\| = |z_{\vec{AB}}| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ AC &= \|\vec{AC}\| = |z_{\vec{AB}}| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \\ BC &= \|\vec{BC}\| = |z_{\vec{BC}}| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \text{equilatéral}$$

(donc pas rectangle)

1

aire : hauteur - droite $\perp$ BC passante par A

$\Rightarrow$ l'axe x

$h = [AF] \Rightarrow AF = 3$ unités

$\mathcal{A} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 3\sqrt{3}$ unités d'aire

C