Exercici 1

(1) (E): $z_1^3 - 27 = 3^3 - 27 = 0 \Rightarrow z_1 = 3$ est une solution de (E)

$\Rightarrow$ on peut factoriser (E) par $(z-3)$

(2) (E): $(z-3)(az^2+bz+c) = 0$

$$az^3 + bz^2 - 3az^2 + cz - 3bz - 3c = 0$$

$$az^3 + z^2(b-3a) + z(c-3b) - 3c = 0$$

$\Rightarrow \boxed{a = 1}$ $\quad b - 3a = 0 \quad$ $-3c = -27$

$b = 3a \quad \boxed{c = 9}$

$\boxed{b = 3}$

$\Rightarrow$ (E): $(z-3)(z^2+3z+9) = 0$

(3) $\Leftrightarrow$ $z - 3 = 0$ ou $z^2 + 3z + 9 = 0$

$z_1 = 3 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot 1\cdot 9 = -27 < 0$

$\Rightarrow z_{2,3} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{S = \left\{3;\ \frac{-3+3\sqrt{3}i}{2};\ -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}i}{2}\right\}}$$

3 :

(1) $|z_A| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$

$\arg(z_A) = \alpha$: $\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{-\frac{3}{2}}{3} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \alpha = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$$\boxed{z_A = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$|z_C| = |z_A|$ car $\overline{z_C} = z_A$

$\Rightarrow \arg z_C = -\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{z_C = 3\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}$

$|z_D| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\arg z_D = \beta$: $\left.\begin{array}{l} \cos\beta = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\beta = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \beta = \dfrac{-\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{z_D = \frac{\sqrt3}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}$

b.) $\frac{z_D}{z_C} = \frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{3}{1}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$\boxed{\frac{z_D}{z_C} = \frac{\sqrt3}{6}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)\right)}$

$\frac{z_D}{z_C} = \frac{\sqrt3}{6}\left(0 + i\right) = \boxed{\frac{\sqrt3}{6} i}$

c.) $Z = (z_C)^4 \cdot (z_D)^2 = 3^4 \cdot \left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2 \left(\cos\left(-\frac{8\pi}{3} - \frac{2\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{8\pi}{3}-\frac{2\pi}{6}\right)\right)$

$= \frac{3^4\cdot 3}{4}\left(\cos\frac{-18\pi}{6} + i\sin\frac{-18\pi}{3}\right)$

$= \boxed{\frac{3^5}{4}\left(\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi)\right)}$

$Z = \frac{3^5}{4}\left(-1 + i\ 0\right)$

$Z = -\frac{3^5}{4} = \boxed{-\frac{243}{4}}$

(3) $\vec{AB}: z_B - z_A = 3 + \frac32 - i\frac{3\sqrt3}{2} = \frac92 - i\frac{3\sqrt3}{2} \Rightarrow AB = \sqrt{\left(\frac92\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt3}{2}\right)^2} =$

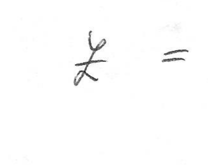
$= \sqrt{\frac{81}{4}+\frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{108}{4}} = \sqrt{27} = \boxed{3\sqrt3}$

$\vec{AC}: z_C - z_A = -\frac32 - i\frac{3\sqrt3}{2} + \frac32 - i\frac{3\sqrt3}{2} = -3\sqrt3 i \Rightarrow AC = \sqrt{0^2+(3\sqrt3)^2} = \sqrt{27} = \boxed{3\sqrt3}$

$\vec{BC}: z_C - z_B = -\frac32 - i\frac{3\sqrt3}{2} - 3 = -\frac92 - i\frac{3\sqrt3}{2} \Rightarrow BC = \boxed{3\sqrt3}$

$\Rightarrow$ <u>$AB = AC = BC \Rightarrow \Delta\ ABC$ est équilatéral</u>

(4)



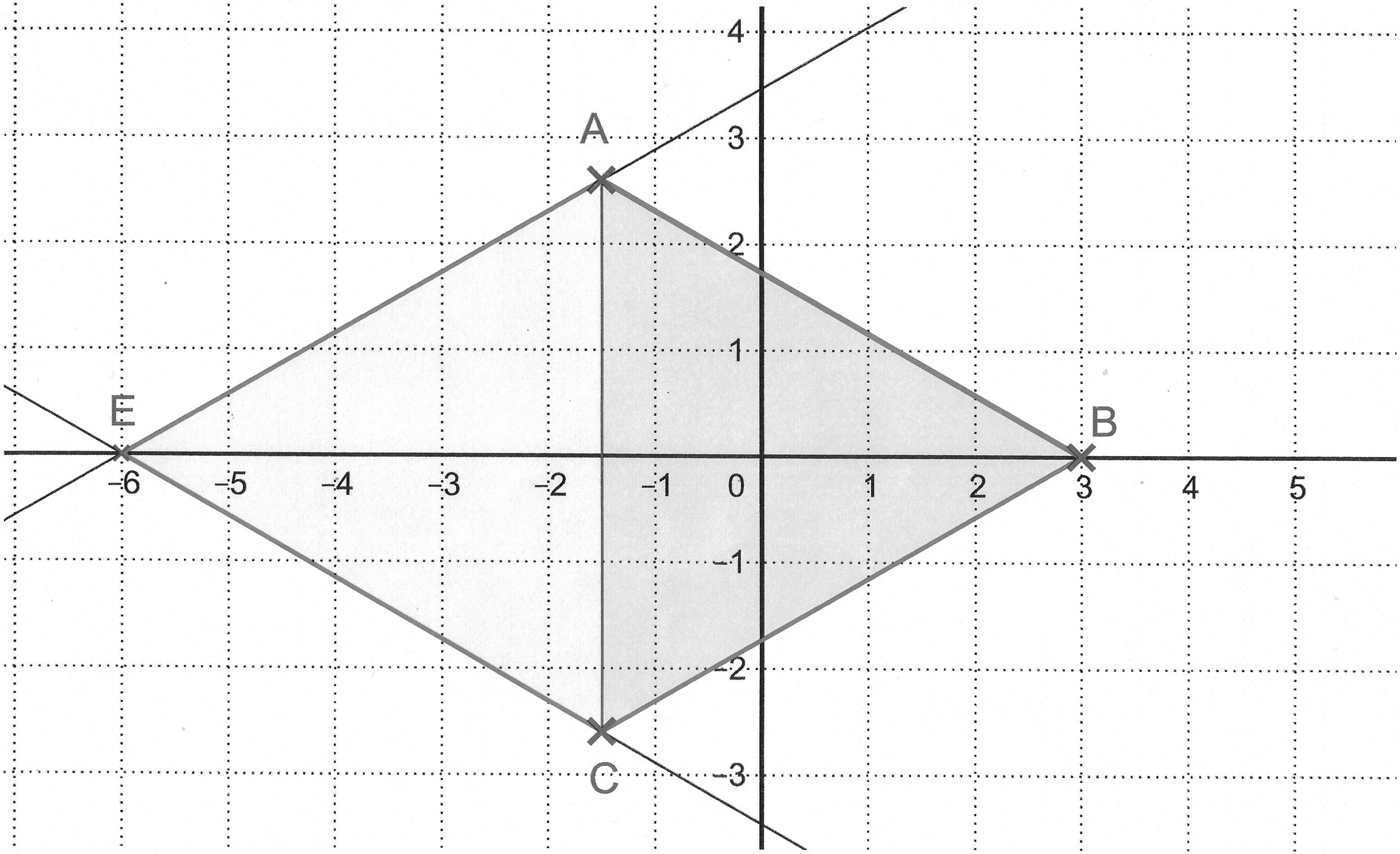
$\vec{AB} = \vec{EC}$

$\frac92 - i\frac{3\sqrt3}{2} = -\frac32 - i\frac{3\sqrt3}{2} - z_E$

$z_E = -\frac32 - i\frac{3\sqrt3}{2} - \frac92 + i\frac{3\sqrt3}{2} = -\frac{12}{2} = \boxed{-6}$

(5) un parallélogramme ABCE avec deux côtés consécutifs [AB]; [BC] de même longueurs est <u>un losange</u>

TC1 2019-2020



Exercice 2

1) $\vec{AB}(1;-1;-1)$, $\vec{AC}(2;-5;-3)$ $\Big\}$ $\vec{AC} \overset{?}{=} k\cdot\vec{AB}$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = k\cdot 1 \Rightarrow k=2 \\ -5 = k\cdot(-1) \Rightarrow k=5 \\ -3 = k\cdot(-1) \Rightarrow k=3 \end{array}\right\} \neq \Rightarrow \nexists k\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

$\Rightarrow$ A, B, C ne sont pas alignés

2) a.) $\vec{u}\cdot\vec{AB} = 2\cdot1 - 1\cdot(-1) + 3\cdot(-1) = 2+1-3 = 0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{AB}$

$\vec{u}\cdot\vec{AC} = 2\cdot2 - 1\cdot(-5) + 3\cdot(-3) = 4+5-9 = 0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{AC}$

$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs de (ABC) non colinéaires, alors $\vec{u}$ est orthogonal à (ABC) $\Rightarrow$

$(\Delta)\perp(ABC)$ $\Rightarrow$ $\vec{u}$ est le vecteur normal à (ABC)

b.) (ABC) : $2x - y + 3z + d = 0$

$A\in(ABC)$: $2\cdot0 - 4 + 3\cdot1 + d = 0$

$d = 1$

$\Rightarrow \boxed{(ABC) : 2x - y + 3z + 1 = 0}$

c.) $(\Delta) : \begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

d.) $\{H\} = (\Delta)\cap(ABC) \Rightarrow H\in(\Delta) \Rightarrow H(7+2t\,;-1-t\,;4+3t)$ pour un certain t.

$H\in(ABC) \Rightarrow$ $2x_H - y_H + 3z_H + 1 = 0$

$2(7+2t) - (-1-t) + 3(4+3t) + 1 = 0$

$14 + 4t + 1 + t + 12 + 9t + 1 = 0$

$14t = -28$

$t = -2$

$\Rightarrow \boxed{H(3;1;-2)}$

③ a.) $\vec{n}(-2;1,5)$ est normal à (P)

$\vec{n}'(1;2;0)$ — " — à (R)

$\vec{n}\cdot\vec{n}' = -2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 5\cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{n}' \Rightarrow \boxed{(P)\perp(R)}$

b.) $(P): -2x + y + 5z + d = 0$

$S\in(P): -2\cdot 1 - 2 + 5 + d = 0$

$d = -1$

$(P): \boxed{-2x + y + 5z - 1 = 0}$

On cherche $(d)\cap(P)$:

$-2\cdot(-1+2t) + (4-t) + 5(-1+t) - 1 = 0$

$2 - 4t + 4 - t - 5 + 5t - 1 = 0$

$0 = 0 \Rightarrow (d)\cap(P) = (d)$

On vérifie $(d)\cap(R)$:

$x + 2y - 7 = 0$

$-1 + 2t + 2(4-t) - 7 = 0$

$-1 + 2t + 8 - 2t - 7 = 0$

$0 = 0 \Rightarrow (d)\cap(R) = (d)$

$\Rightarrow \boxed{d = (P)\cap(R)}$

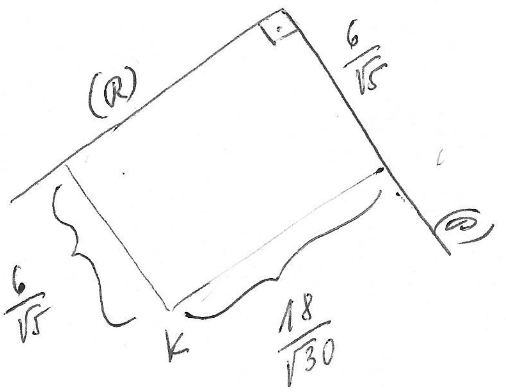
c.) $d(K;(P)) = \dfrac{|-2x_k + y_k + 5z_k - 1|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|-2\cdot 5 - 2 + 5(-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2}} =$

$= \dfrac{|-18|}{\sqrt{4+1+25}} = \dfrac{18}{\sqrt{30}}$ u.g.

$d(K;(R)) = \dfrac{|x_k + 2y_k - 7|}{\|\vec{n}'\|} = \dfrac{|5 + 2\cdot(-2) - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} =$

$= \dfrac{|-6|}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ u.g.

d.)



$$\Rightarrow d(K;(d))^2 = \left(\frac{18}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt5}\right)^2$$

$$= \frac{324}{30} + \frac{36}{5} =$$

$$= \frac{324+216}{30}$$

$$= \frac{540}{30} = \frac{54}{3} = 18$$

$$= 9\cdot 2$$

$$\Rightarrow \boxed{d(K;(d)) = 3\cdot\sqrt{2} \text{ u.g.}}$$

4) $\vec{u}(2;-1;3)$ est le v. normal à (ABC)

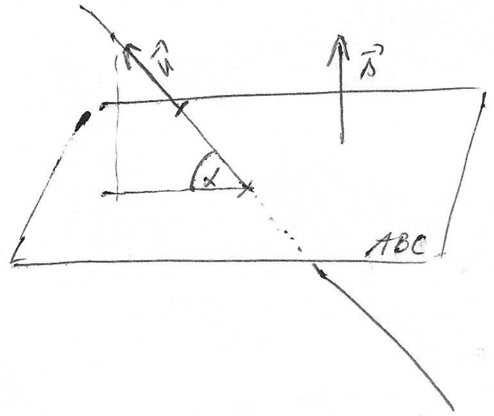
$\vec{s}(2;-1;1)$ est le v. directeur de (d)

$\vec{s}\cdot\vec{u} = 2\cdot2 - 1(-1) + 3\cdot1 \neq 0$

$\Rightarrow$ (d) $\not\parallel$ (ABC)

$\Rightarrow$ (d) coupe le plan (ABC)

5)



$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{s}\|}$$

$$= \frac{|2\cdot2+1+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\,\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = 60{,}8^\circ}$$

$\boxed{\text{Ex } 3}$

$\boxed{A}$: $g(x) = x^3 - 1 + 2 \cdot \ln x$

1. $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \boxed{-\infty}$ car $\lim\limits_{x \to 0} (x^3 - 1) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2. $g'(x) = 3x^2 + 2\,\frac{1}{x} = \frac{3x^3 + 2}{x}$

sur $]0; +\infty[$: $\left.\begin{matrix} 3x^3 + 2 > 0 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g'(x)$ est $\oplus$

$\Rightarrow$

x	0		∞
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $g(1) = 1 - 1 + 2 \cdot \ln 1 = 0 \Rightarrow$

x	0		1		∞
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$\boxed{B}$ 1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \boxed{+\infty}$ car $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ (formulaire)

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

② $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\cdot \ln x}{x^4} =$

$= 1 - \dfrac{x - 2x\ln x}{x^4} =$

$= 1 - \dfrac{1-2\ln x}{x^3} = \dfrac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$ cqfd.

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	
x^3	||	$+$	1	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 1 - \frac{0}{1} = \boxed{1}$

③ On étudie $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 0$ (formulaire) $\Rightarrow$

La droite (Δ) : $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

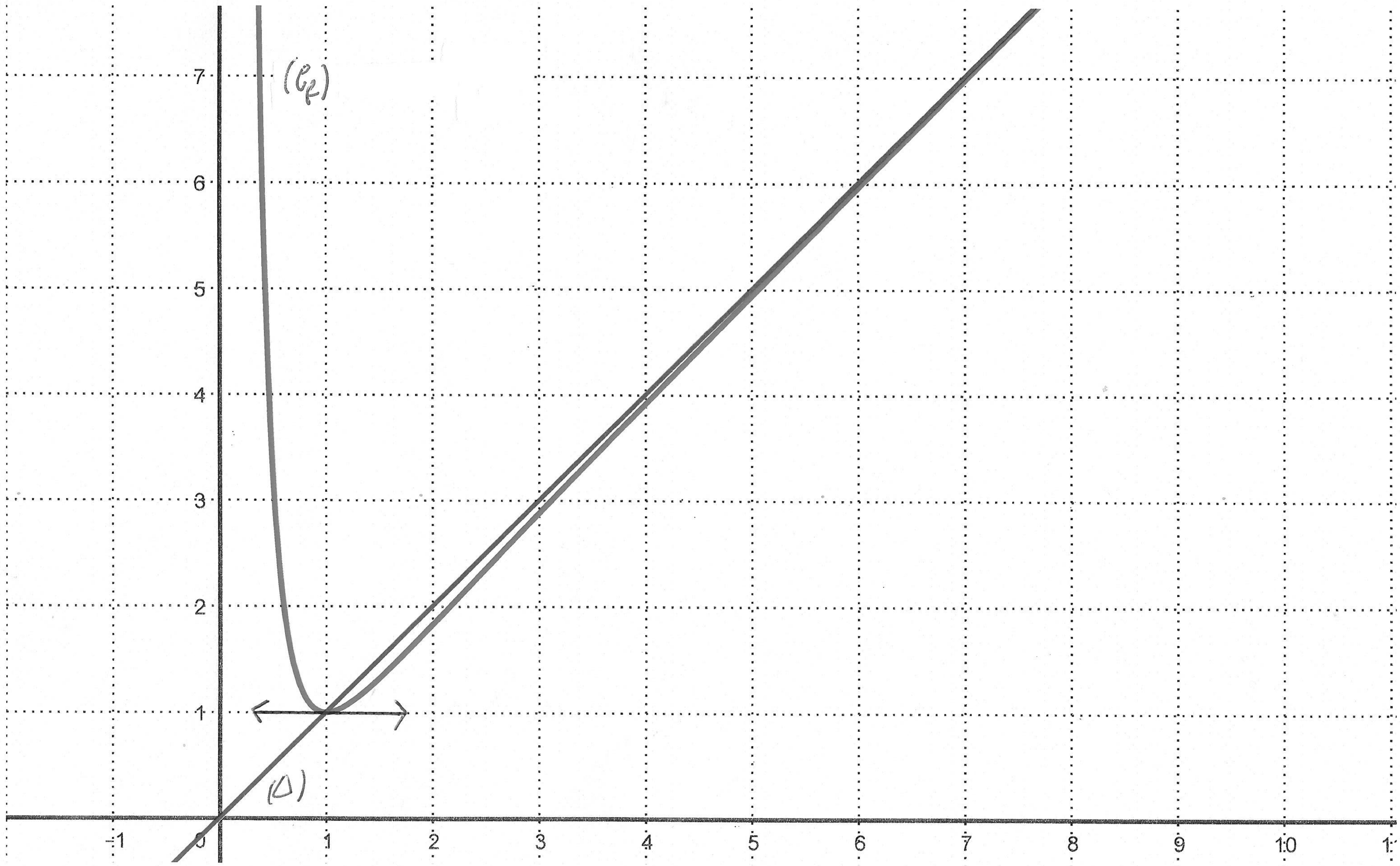
④ On étudie le signe de $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	||	$+$	0	$-$	
x^2	||	$+$	1	$+$	
$f(x)-x$	||	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow$ sur $]0;1[$: $f(x)$ est au-dessus de (Δ)

sur $]1;+\infty[$: $f(x)$ est au-dessous de (Δ)

$\Rightarrow$ en $x = 1$ $f(x)$ et (Δ) se coupent.



$(\mathcal{C}_f)$
(Δ)
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
1
2
3
4
5
6
7

$\boxed{\text{Exercice 4}}$

1.) $f(x) = 0{,}4$ admet $\boxed{\text{deux}}$ solutions

2.) sur $[-2\,;2]$ $f(x)$ est $\nearrow$ $\Rightarrow$ $\boxed{f'(x) \geqslant 0}$

3.) $f'(0) = 1 \Rightarrow y = x + k$ et coupe l'axe des ordonnées
en $y = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = x + \frac{1}{2}}$

4.) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} = \boxed{-\ln 2}$