5^e/6^e année ***décembre 2019*** ***durée : 4 x 60 min***

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES
CONTRÔLE COMMUN N°1

Exercice 1
(sur 6 points)

Partie A

On considère, dans l´ensemble des nombres complexes, l´équation (E): $z^3 - 27 = 0$

1) Montrer que le nombre complexe $z_1 = 3$ est une solution (E).
2) Démontrer que (E) peut s´écrire sous la forme : $(z-3)(az^2 + bz + c) = 0$ où *a, b* et c sont trois réels que l´on déterminera.
3) Résoudre l´équation (E).

Partie B

Le plan complexe est muni d´un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}; \vec{v}\right)$ d´unité graphique *2 cm*.

On considère les points *A*, *B* et *C* d´affixes respectives :

$$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad z_B = 3 \qquad z_C = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad z_D = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

1) a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_A , z_C et z_D .

   b) En utilisant les formes trigonométriques calculer : $\frac{z_D}{z_C}$. En déduire la forme algébrique de $\frac{z_D}{z_C}$.

   c) En utilisant la forme trigonométrique calculer : $Z = (z_C)^4 \cdot (z_D)^2$.

   En déduire la forme algébrique de *Z*.
2) Construire les points *A*, *B*, *C*. On complètera la figure au fur et à mesure de la résolution de l´exercice.
3) Déterminer la nature du triangle *ABC*.
4) Calculer l´affixe du point *E* pour que *ABCE* soit un parallélogramme.
5) En déduire la nature plus précise du quadrilatère *ABCE* ainsi obtenu.

Exercice 2
(sur 6 points)

L´espace est muni d´un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(0;4;1)$, $B(1;3;0)$, $C(2;-1;-2)$ et $D(7;-1;4)$.

1) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Soit (Δ) la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$.
   a) Démontrer que la droite (Δ) est orthogonale au plan (ABC).
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
3) On considère le plan (P) passant par le point $S(1;-2;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2;1;5)$ et le plan (R) d´équation cartésienne $x+2y-7=0$.
   a) Démontrer que les plans (P) et (R) sont perpendiculaires.
   b) Démontrer que l´intersection des plans (P) et (R) est la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=4-t \\ z=-1+t \end{cases} \quad t\in R$
   c) Soit le point $K(5;-2;-1)$. Calculer la distance du point K au plan (P), puis la distance du point K au plan (R).
   d) En déduire la distance du point K à la droite (d).
4) Étudier la position relative de la droite (d) par rapport au plan (ABC).
5) Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l´angle α, l´angle entre la droite (d) et le plan (ABC).

Exercice 3

(sur 6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique *2 cm*.

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

   Dresser le tableau de variations de g.
3) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE B

1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2) Prouver que pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

   Construire le tableau de variations de la fonction f.
3) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) en $+\infty$.
4) Déterminer la position relative de (C_f) par rapport à (Δ).
5) Tracer la courbe (C_f) et la droite (Δ).

Exercice 4

(sur 2 points)

Chaque question comporte trois affirmations, une seule des trois est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte sans justifier votre choix.

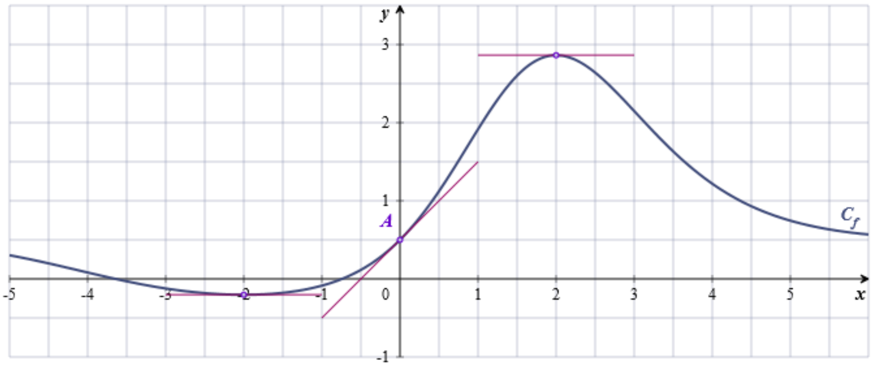
Une bonne réponse rapporte 0,5 point; une mauvaise réponse donne 0 point; l'absence de réponse donne 0 point.

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La figure ci-dessous montre une partie de sa courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormal.

On dispose des renseignements suivants sur la fonction f et la courbe (C_f) :

- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2 ; 2]$, elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -2]$ et sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$;
- la droite d'équation $y = 0,5$ est asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$;
- la tangente en $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ à la courbe (C_f) passe par le point de coordonnées $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.



1) Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0,4$ admet :
   - une solution
   - deux solutions
   - trois solutions

2) On note f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. La fonction f' est :
   - croissante sur $[0 ; 2]$
   - positive sur $[-2 ; 2]$
   - positive sur $[0 ; +\infty[$

3) La tangente en A à la courbe (C_f) a pour équation :
   - $y = 0,5x + 1$
   - $y = x + 0,5$
   - $y = 1,5x + 0,5$

4) On note g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(f(x))$:
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\ln 2$

Barème :

Exercice n°1
(sur 6 points)

Partie A
1) 0,25
2) 0,5
3) 0,5
Partie B
1) a)1,25
b)0,75
c) 0,75
2) 0,5
3) 0,75
4) 0,5
5) 0,25

Exercice n°2
(sur 6 points)

1) 0,5
2) a) 0,75
b) 0,5
c) 0,25
d) 0,5
3) a) 0,5
b) 1
c) 0,5
d) 0,5
4) 0,5
5) 0,5

Exercice n°3
(sur 6 points)

PARTIE A
1) 0,5
2) 0,75 + 0,25
3) 0,5
PARTIE B
1) 0,75
2) 0,5 + 0,75
3) 0,5
4) 0,75
5) 0,75

Exercice n°4
(sur 2 points)

4 x 0,5