EXERCICE 1

PARTIE A

$$g(x) = e^x + x + 1$$

1.) $g'(x) = e^x + 1 >$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g(x)$ est strictement croissante $\forall x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$

	$-\infty$		∞
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.) Lorsque g est * dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$
* strictement croissante sur $\mathbb{R}$
* change le signe sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ il existe une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $g(\alpha) = 0$

$$\left.\begin{aligned} g(-1{,}28) &= -0{,}00196 < 0 \\ g(-1{,}27) &= 0{,}01083 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{-1{,}28 < \alpha < -1{,}27} \quad \text{c.q.f.d.}$$

3.)

		α	
$g(x)$	$-$	0	$+$

PARTIE B $\quad f(x) = \dfrac{x \cdot e^x}{e^x + 1}$

2.) $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{(x \cdot e^x)' \cdot (e^x+1) - (x \cdot e^x)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} =$$

$$= \frac{(1 \cdot e^x + x \cdot e^x)(e^x+1) - (x \cdot e^x)(e^x)}{(e^x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} + x \cdot e^{2x} + e^x + xe^x - e^{2x} \cdot x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+1+x)}{(e^x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x+1)^2} \quad \text{c.q.f.d.}$$

	$-\infty$		α		∞
e^x		$+$	|	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$(e^x+1)^2$		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

1.) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \cdot e^x}{e^x+1} = FI$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{e^x}} = \boxed{+\infty} \quad \text{car } \lim_{x \to +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x \cdot e^x}{e^x+1} = FI$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot e^x = 0$ (formulaire) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$(\mathcal{G})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

3.) $f(\alpha) = \alpha + 1$ et $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27 \quad | +1$

$$-0{,}28 < \alpha + 1 < -0{,}27$$

$$\Rightarrow \boxed{-0{,}28 < f(\alpha) - 0{,}27}$$

4.) $f'(0) = \dfrac{e^0 \cdot (e^0 + 1 + 0)}{(e^0+1)^2} = \dfrac{1(1+1+0)}{2^2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$(t) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ $\qquad f(0) = \dfrac{0 \cdot e^0}{e^0 + 1} = 0$

$$\boxed{y = \tfrac{1}{2} x}$$

On étudie $f(x) - y_t = \dfrac{x \cdot e^x}{e^x + 1} - \dfrac{1}{2} x$

$$= \frac{x \cdot e^x - \frac{1}{2} x \cdot (e^x + 1)}{e^x + 1} = \frac{\frac{1}{2} x \cdot e^x - \frac{1}{2} x}{e^x + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} x (e^x - 1)}{e^x + 1}$$

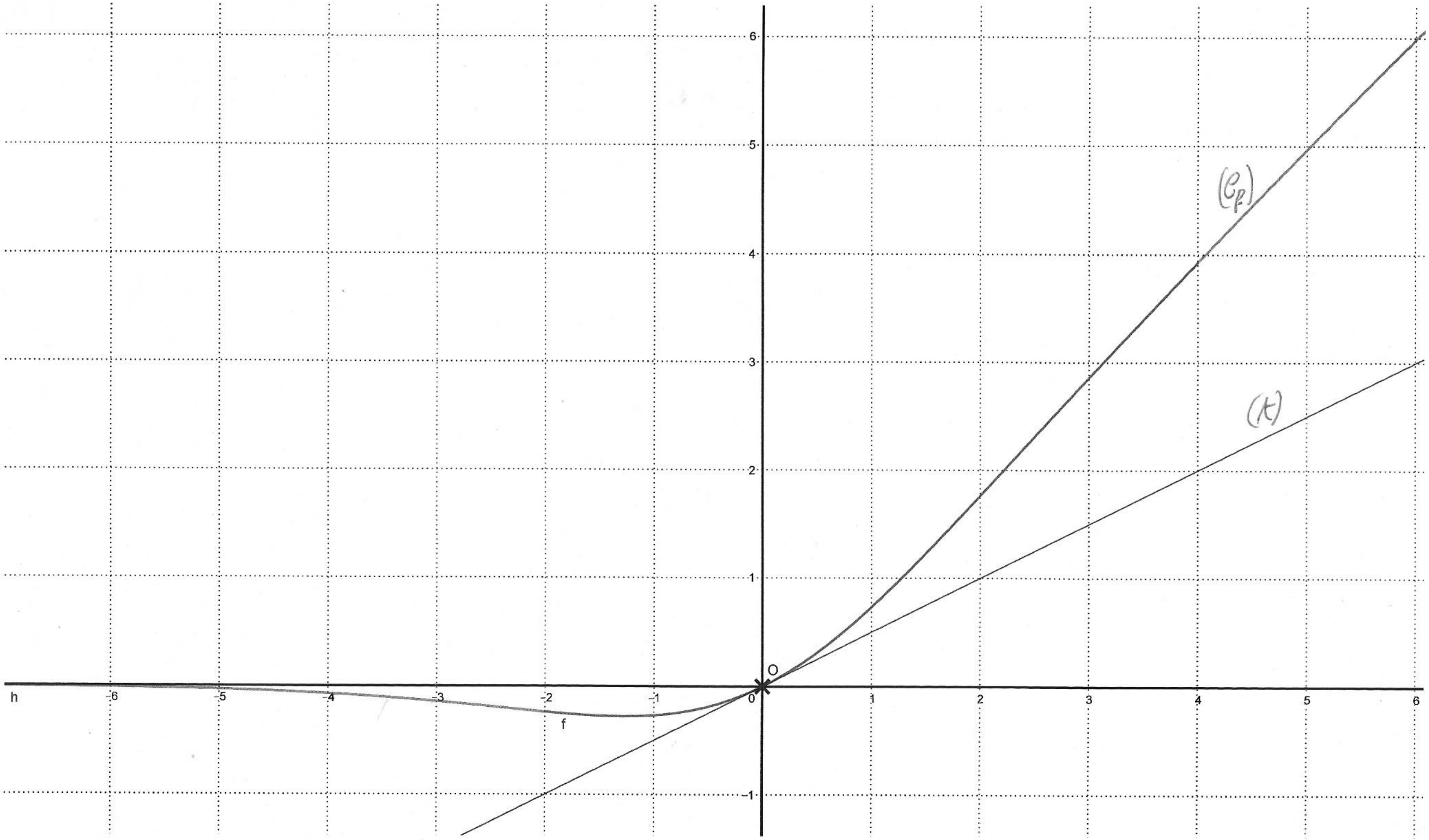
$e^x - 1 = 0$
$e^x = 1$
$x = 0$

		0	
$\frac{1}{2} x$	$-$	0	$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$e^x + 1$	$+$	|	$+$
	$+$	0	$+$

Sur $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$: $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (t)

en $x = 0$ $\qquad (\mathcal{C})$ touche (t)

5)



EXERCICE 2

1.) D_f : $x^2-3x+2 \neq 0$

$(x-2)(x-1) \neq 0 \iff x-2 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$

$x \neq 2 \qquad x \neq 1$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{2;1\}}$$

2.) $$ax+b+\frac{cx+d}{x^2-3x+2} = \frac{(ax+b)(x^2-3x+2)+cx+d}{x^2-3x+2} =$$

$$= \frac{ax^3-3ax^2+2ax+bx^2-3bx+2b+cx+d}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{ax^3+x^2(b-3a)+x(2a-3b+c)+2b+d}{x^2-3x+2} = f(x)$$

$\Rightarrow$ $a=1$ $\qquad b-3a=-4$ $\qquad 2a-3b+c=6$ $\qquad 2b+d=-1$

$b=-4+3 \qquad 2+3+c=6 \qquad -2+d=-1$

$b=-1 \qquad c=1 \qquad d=1$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = x-1+\frac{x+1}{x^2-3x+2}}$$

3.) $$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}(x-2)\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-1)\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{(x-2)\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=+\infty$

$\Rightarrow$ <u>$(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation</u>

<u>(Δ) : $y = x-1$</u> en $\pm\infty$.

4.) On étudie le signe de $\left(f(x) - (x-1)\right) = \dfrac{x+1}{(x-2)(x-1)}$

		-1		1		2	
$x+1$	$-$	0	$+$	||	$+$	||	$+$
$x-2$	$-$	|	$-$	||	$-$	||	$+$
$x-1$	$-$	|	$-$	||	$+$	||	$+$
$f(x)-(x-1)$	$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$

Sur $]-\infty ; -1[$ et $]1 ; 2[$: $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (Δ)

Sur $]-1 ; 1[$ et $]2 ; +\infty[$: $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ)

en $x = -1$: $(\mathcal{C})$ et (Δ) se coupent

EXERCICE 3

1.) a.) $\vec{AB}(2;0;4)$
$\vec{AC}(0;-1;1)$ $\Bigg\}$ $\nexists k \in \mathbb{R} : \vec{AB} = k.\vec{AC} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires
$\Rightarrow A, B, C$ ne sont pas alignés

b.) $\vec{AB}.\vec{AC} = 2.0 + 0.(-1) + 4.1 = 4$

$AB = \sqrt{2^2+0^2+4^2} = \sqrt{20}$
$AC = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$

c.) $\vec{AB}.\vec{AC} = \|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|.\cos(\vec{AB};\vec{AC})$

$$4 = \sqrt{20}.\sqrt{2}.\cos(\vec{AB};\vec{AC})$$

$$\cos(\widehat{\vec{AB};\vec{AC}}) = \frac{4}{\sqrt{40}}$$

$$(\vec{AB};\vec{AC}) = \arccos\frac{4}{\sqrt{40}}$$

$\boxed{\widehat{BAC} \simeq 51° \text{ arrondi au degré}}$

2.) a.) $\vec{n}.\vec{AB} = 2.2 + 0.(-1) - 1.4 = 4 + 0 - 4 = 0$
$\vec{n}.\vec{AC} = 2.0 - 1.(-1) - 1.1 = 0 + 1 - 1 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non-colinéaires du plan $(ABC) \Rightarrow$ <u>$\vec{n}$ est le vecteur normal à (ABC)</u>

b.) $(ABC) : 2x - y - z + d = 0$
$A \in (ABC) : 2.(-1) - 2 - 0 + d = 0$
$d = 4$

$(ABC) : \boxed{2x - y - z + 4 = 0}$

3.) Tout vecteur normal à (S) est un vecteur normal du plan d'équation $x - 2z + 6 = 0 \Rightarrow$ $\vec{n}'(1;0;-2)$

$\Rightarrow (S) : x - 2z + d = 0$
$O \in (S) : 0 - 2.0 + d = 0$
$d = 0 \Rightarrow (S) = x - 2z = 0$

$\boxed{x = 2z}$ c.q.f.d.

4.) a.) $\vec{n}'(1;0;-2)$ est un v. normal à (S)

$\vec{n}(3;1;-2)$ — // — à (P)

$$\left.\begin{array}{lll} 3 = k\cdot 1 & \Rightarrow & k = 3 \\ 1 = k\cdot 0 & \Rightarrow & k \notin \mathbb{R} \\ -2 = k\cdot(-2) & \Rightarrow & k = 1 \end{array}\right\} \nexists k \in \mathbb{R} : \vec{n} = k\cdot\vec{n}' \Rightarrow$$

$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires

$\Rightarrow (P) \not\parallel (S)$

$\Rightarrow$ <u>(P) et (S) sont sécants</u>

b.)
$$\left.\begin{array}{r} 3x+y-2z+3=0 \\ x-2z=0 \\ z=t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = -3x+2z-3 = -6t+2t-3 \\ x = 2t \\ z = t \end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow (D) : \begin{cases} x = 2t \\ y = -3-4t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

5.) $\{I\} = (D) \cap (ABC) \Rightarrow$

$I \in (D) \Rightarrow \quad x_I = 2t$

$y_I = -3-4t$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$

$z_I = t$

$I \in (ABC) \Rightarrow \quad 2x_I - y_I - z_I + 4 = 0$

$2(2t) - (-3-4t) - t + 4 = 0$

$4t + 3 + 4t - t + 4 = 0$

$7t = -7$

$t = -1$

$\Rightarrow \boxed{I(-2;1;-1)}$

EXERCICE 4

PARTIE A : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1.) $P(i\sqrt{3}) = (i\sqrt{3})^4 - 6.(i\sqrt{3})^3 + 24.(i\sqrt{3})^2 - 18(i\sqrt{3}) + 63 =$
$= 9 + 18\sqrt{3}i - 72 - 18i\sqrt{3} + 63 = \boxed{0}$

$P(-i\sqrt{3}) = (-i\sqrt{3})^4 - 6.(-i\sqrt{3})^3 + 24(-i\sqrt{3})^2 - 18(-i\sqrt{3}) + 63 =$
$= 9 - 18\sqrt{3}i - 72 + 18\sqrt{3}i + 63 = \boxed{0}$

$\Rightarrow$ $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ sont des racines de $P(z)$
$\Rightarrow$ on peut factoriser $P(z)$ par $(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = (z^2 + 3)$

2.) $(z^2+3)(z^2+az+b) = z^4 + az^3 + bz^2 + 3z^2 + 3az + 3b =$
$= z^4 + az^3 + z^2(3+b) + z(3a) + 3b$
$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

$\boxed{a = -6}$ $\boxed{b = 21}$

3.) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 3 = 0$ ou $z^2 - 6z + 21 = 0$

$z_1 = i\sqrt{3}$
$z_2 = -i\sqrt{3}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = -48$

$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{48i^2}}{2}$

$x_{1;2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}i}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3}i$

$\boxed{\mathcal{S} = \{ i\sqrt{3} \,;\, -i\sqrt{3} \,;\, 3+2\sqrt{3}i \,;\, 3-2\sqrt{3}i \}}$

PARTIE B : $z_D = 3 - 2i\sqrt{3}$

1.) $\vec{AS}$: $z_{\vec{AS}} = z_S - z_A = 3 - i\sqrt{3}$
$\vec{BS}$: $z_{\vec{BS}} = z_S - z_B = 3 + i\sqrt{3}$
$\vec{CS}$: $z_{\vec{CS}} = z_S - z_C = 3 - 3 - 2i\sqrt{3} = -2i\sqrt{3}$
$\vec{DS}$: $z_{\vec{DS}} = z_S - z_D = 3 - 3 + 2i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$

$$AS = \sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$$
$$BS = \sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$$
$$CS = \sqrt{0^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{0+12} = \sqrt{12}$$
$$DS = \sqrt{0^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{0+12} = \sqrt{12}$$

$AS = BS = CS = DS$

$\Rightarrow A, B, C, D \in \mathcal{C}(S;\ r=\sqrt{12})$

2.) $(\mathcal{C})$: $(x-3)^2+(y-0)^2 = 12$

$$(x-3)^2 + y^2 = 12$$
$$\boxed{x^2+y^2-6x-3=0}$$

4.) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OE} \Leftrightarrow z_O - z_D = z_E - z_O$

$$\Leftrightarrow \boxed{-3+2i\sqrt{3} = z_E}$$

5.) $\overrightarrow{BE}$: $z_E - z_B = -3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3} = -3+3i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow BE = \sqrt{(-3)^2+(3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = \boxed{6}$$

$\overrightarrow{EC}$: $z_C - z_E = 3+2i\sqrt{3}+3-2i\sqrt{3} = 6$

$$\Rightarrow EC = \sqrt{0^2+6^2} = \boxed{6}$$

$\overrightarrow{BC}$: $z_C - z_B = 3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3} = 3+3i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = \boxed{6}$$

$BE = EC = BC \Rightarrow$ <u>Δ BCE est équilatéral</u>

TC1 2017-2018, 5. ročník

3)