Exercice n° 1
(sur 9 points)

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = \frac{1}{2} + (-x^2 + x + 1)e^{-x}$.

On admet que

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{1}{2} \quad .$$

1. Démontrer que $g'(x) = e^{-x}(x^2 - 3x)$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$.
   En déduire le tableau de variation de la fonction g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, que l'on notera α, dans $\mathbb{R}$.
   Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
4. En déduire le signe de la fonction g.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{2} + (x^2 + x)e^{-x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique $1\ cm$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2.
   a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Donner l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
4.
   a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.
   b) Étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite (D).
5. Construire la courbe (C) et les droites (D) et (T) avec soin et précision.

Exercice n° 1

PARTIE : A

① $g'(x) = \left(\frac{1}{2} + (-x^2+x+1)e^{-x}\right)' = (-2x+1)e^{-x} + (-x^2+x+1)e^{-x}(-1)$

$= e^{-x}(-2x+1+x^2-x-1)$

$g'(x) = e^{-x}(x^2-3x)$

② $e^{-x} > 0$.

$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
Signe de x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

$g(0) = \frac{1}{2} + (1)e^{-0} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$g(3) = \frac{1}{2} + (-3^2+3+1)e^{-3} = \frac{1}{2} + (-9+4)e^{-3} = \frac{1}{2} - \frac{5}{e^3}$

③ (i) Pour $]-\infty; 0[$: $\begin{cases} g \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;0[\\ g \text{ est continue sur }]-\infty;0[\text{ car elle est dérivable} \\ \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \\ g(0) = \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$

d'où $g(x)=0$ admet une unique solution dans $]-\infty;0[$.

Pour $[0;+\infty[$: g est minorée par $g(3) = \frac{1}{2} - \frac{5}{e^3} > 0$

d'où $g(x)=0$ n'admet aucune solution $[0;+\infty[$.

Conclusion : l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

(ii) On a $g(-0,8) < 0$ et $g(-0,7) > 0$.

De là : $-0,8 < \alpha < -0,7$.

④

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B

① $f(x) = \dfrac{x}{2} + (x^2+x)e^{-x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{2}}_{\to+\infty} + \underbrace{x^2e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{xe^{-x}}_{\to 0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x}{2}}_{\to-\infty} + \underbrace{\underbrace{(x^2+x)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}}_{\to+\infty}$$ (on a une indétermination)

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to 0} + \underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}}_{\to+\infty}\right)}_{\to+\infty} = +\infty$$

②ⓐ $f'(x) = \left(\dfrac{x}{2} + (x^2+x)e^{-x}\right)' = \dfrac{1}{2} + (2x+1)e^{-x} + (x^2+x)e^{-x}(-1)$

$= \dfrac{1}{2} + (2x+1-x^2-x)e^{-x} = \dfrac{1}{2} + (-x^2+x+1)e^{-x}$

$= g(x)$

ⓑ

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

③ $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f(0) = 0 + 0 = 0$

$f'(0) = g(0) = \frac{3}{2}$

$(T) : y = \frac{3}{2}x$

④ ⓐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 + x)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^2 e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{x e^{-x}}_{\to 0} = 0$

Par conséquent, (D) est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

⑤ Soit $d(x) = f(x) - \frac{x}{2}$.

$d(x) = (x^2 + x)e^{-x} = x(x+1)e^{-x}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de $x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
Signe de $d(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(C) est strictement au-dessus de (D) sur $]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$.

(C) est strictement en dessous de (D) sur $]-1 ; 0[$.

(C) et (D) admettent 2 points d'intersection en -1 et en 0.

(5)