Váhový úkol; vypracovat na list papíru, odevzdat 3.1.2022

Exercice n°2
(sur 6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2+x-\dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 6 *cm* sur l'axe des abscisses et 2 *cm* sur l'axe des ordonnées.
On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g.

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=2x^3+x^2+\ln(x)$.
1°) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2°) Déterminer la limite de g en 0^+.
3°) a) Calculer $g'(x)$.
b) Démontrer que $g'(x)>0$ pour tout $x>0$ puis en déduire le tableau de variations de g.
c) Démontrer qu'il existe un unique nombre réel $\alpha>0$ tel que $g(\alpha)=0$.
Justifier l'encadrement : $0{,}54<\alpha<0{,}55$.
4°) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$.

Partie B

1°) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Déterminer la limite de f en 0^+. Interpréter le résultat graphiquement.
2°) a) Montrer que pour tout $x\in\,]0;+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
b) En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3°) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
4°) Construire (C) et (T) dans le repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.