Goniometrické funkce

Tik tak

Mirek Kubera

Laboratorní práce
Doba na přípravu: **5 min**
Doba na provedení: **45 min**
Obtížnost: **nízká**

Výstup RVP: žák načrtne grafy elementárních funkcí a určí jejich vlastnosti, při konstrukci grafů aplikuje znalosti o zobrazeních, formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí, aplikuje vztahy mezi hodnotami goniometrických funkcí a vztahy mezi těmito funkcemi

Klíčová slova: goniometrické funkce, sinus, kosinus, amplituda, perioda, posunutí ve směru osy x, posunutí ve směru osy y, úhlová frekvence, derivace, poloha, rychlost

Úkol

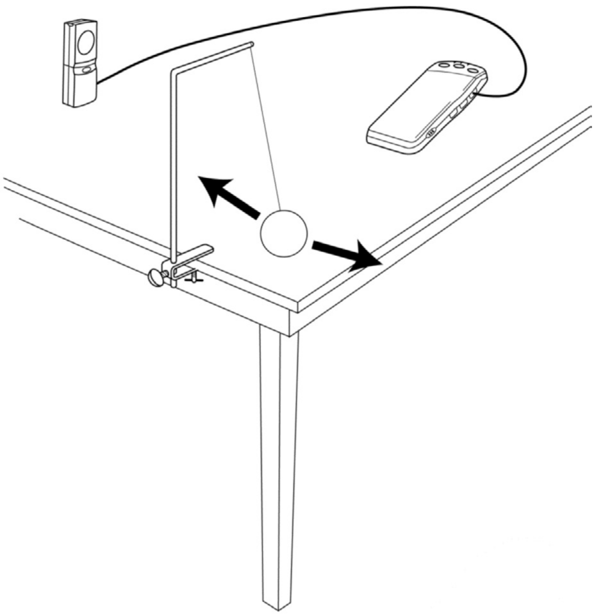
1) Změřte závislost polohy pohybujícího se kyvadla na čase.
2) Určete periodu kmitů kyvadla.
3) Porovnejte graf naměřené závislosti s grafem funkce kosinus.

Pomůcky

Počítač s programem Logger Pro, sonar Go!Motion, kyvadlo délky 80 cm, stojan, dlouhé pravítko či metr

Teoretický úvod

Pohyb kyvadla fascinoval lidstvo dlouhou dobu. Galileo pozoroval pohupující se svícen a srovnával jeho pohyb se svým pulsem. V roce 1851 Jean Foucault pomocí dlouhého kyvadla prokázal rotaci Země. Kyvadlo se pohybuje stále ve stejné rovině, zatímco Země pod ním se otáčí.



Vypracování

1) Zavěste kyvadlo na pevný stativ a umístěte sonar Go!Motion přibližně do vzdálenosti 50 cm od rovnovážné polohy kyvadla.
2) Zapojte sonar Go!Motion do počítače a spusťte program Logger Pro.
3) Změřte vzdálenost mezi kyvadlem ve svislé poloze a sonarem. Zapište tuto vzdálenost *D* do připravené tabulky.
4) Umístěte metr pod kyvadlo. Jeho počátek musí být pod kyvadlem, které je v rovnovážné poloze (svislý závěs). Určete, jak daleko budete kyvadlo vychylovat při uvedení do pohybu. Tato vzdálenost by měla být alespoň 20 cm. Zapište tuto hodnotu do tabulky jako amplitudu *A*.
5) Uveďte kyvadlo do pohybu a pomocí stopek změřte periodu jeho pohybu. Perioda je doba potřebná k tomu, aby se kyvadlo při svém pohybu vrátilo do původní polohy a pohyb se začal opakovat. Změřte desetinásobek periody a zapište tuto hodnotu do tabulky.

Tik tak

6) Jestliže se kyvadlo pohybuje pravidelně, spusťte **Sběr dat**. Měření bude probíhat po dobu pěti sekund.
7) Získaný graf závislosti vzdálenosti na čase by měl mít průběh podobný funkci kosinus. Jestliže máte pochybnosti o správnosti naměřených dat, poraďte se se svým učitelem.

Analýza dat

1) Budete porovnávat naměřená data s průběhem funkce $y = A\cos(B(x - C)) + D$. Hodnoty změřené při nastavování experimentu, stejně jako naměřená data, vám umožní určit parametry A, B, C i D.
2) Klikněte do oblasti grafu a učiňte ho aktivním. Vyberte funkci **Analýza→Odečet hodnot** a určete hodnotu parametru C. Tato hodnota představuje posunutí křivky ve směru osy x oproti základní funkci kosinus. Základní kosinus má pro $x = 0$ maximální hodnotu. Určete tedy čas, ve kterém je naše naměřená křivka maximální. Tuto hodnotu zapište do tabulky jako C.
3) Máte změřen desetinásobek periody T. Vypočítejte tedy hodnotu jedné periody T. Zapište ji do tabulky.
4) Parametr B se nazývá úhlová frekvence a vyjadřuje počet opakování, které funkce vykoná během doby 2π sekund. Vypočítejte hodnotu $B = \frac{2\pi}{T}$ a zapište ji do tabulky.

Tabulka naměřených hodnot

A (m)	
B (s^{-1})	
C (s)	
D (m)	
$10 \cdot T$ (s)	
T (s)	

5) Nyní můžete vytvořit graf naměřené funkce. Vyberte **Analýza→Proložit křivku...**. Vyberte **Manuální aproximace** a zadejte nově definovanou funkci $A^*\cos(B^*(t - C)) + D$. Zadejte hodnoty parametrů A, B, C a D z tabulky.
   a) Hodnota A je rovna amplitudě pohybu kyvadla.
   b) Hodnota B je rovna úhlové frekvenci kyvadla.
   c) Hodnota C je rovna hodnotě posunutí křivky ve vodorovném směru (čas).
   d) Hodnota D je rovna hodnotě posunutí křivky ve směru osy y (vzdálenost od sonaru).
6) Jak dobře tato funkce prochází naměřenými daty? Jestliže proložení odpovídá naměřeným datům, zapište si vloženou rovnici a odpovídejte na další otázky. Jestliže křivka neodpovídá naměřeným datům, pokuste se parametry změnit tak, aby křivka procházela naměřenými daty. Diskutujte se svými spolužáky a učitelem, jaký vliv na proloženou křivku má který parametr. Výsledek opět zapište a pokračujte odpovědí na další otázky.

Úkoly pro zvídavé

1) Jak by se změnily parametry A, B, C a D, jestliže bychom se pokusili modelovat tuto periodickou funkci funkcí $y = A \sin(B(x - C)) + D$ místo funkcí kosinus? Napište svou předpověď a každou z hodnot zdůvodněte.
2) Ověřte svou předpověď změnou modelu. Proložte naměřená data funkcí sinus charakterizovanou novými koeficienty A, B, C a D. Prochází tato funkce naměřenými daty? Pokud ne, proč? Opravte model tak, aby jimi procházela.
3) Jaký je význam jednotlivých koeficientů A, B, C a D z modelu pohybu kyvadla ve tvaru $y = A \cos(B(x - C)) + D$? Upřesněte.
4) Máte před sebou graf závislosti polohy kyvadla na čase. Zkuste spočítat derivaci této funkce. Vyberte **Data→Nový dopočítávaný sloupec**. Zadejte název a označení funkce této nové funkce (např. derivace, D1), případně její jednotku (zde m/s). V poli pro rovnici nového sloupce zadejte **derivace(„vzdálenost“)**. Získáte tak graf závislosti rychlosti kyvadla na čase. Jaká je souvislost obou studovaných závislostí? Kdy je rychlost kyvadla nulová? Kdy je rychlost kyvadla maximální? K odpovědi na tyto otázky si můžete vytvořit graf znázorňující obě funkce v závislosti na čase zároveň.