Funkce – kvadratická funkce

# Jedeme vzhůru!

Mirek Kubera

**Laboratorní práce**
Doba na přípravu: **5 min**
Doba na provedení: **45 min**
Obtížnost: **nízká**

**Výstup RVP:** žák načrtne grafy požadovaných funkcí, formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí, modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí

**Klíčová slova:** kvadratická funkce, graf funkce, obecná rovnice paraboly, parabola, vrchol paraboly, průsečíky s osami x a y

**Úkol**

1) Změřte pro vozík pohybující se po nakloněné rovině závislost polohy na čase.
2) Vytvořte vhodný matematický model pro tuto závislost, použijte průsečíky s osami *x* a *y*.

**Pomůcky**

Počítač s programem Logger Pro, sonar, vozík, nakloněná rovina délky cca 1 m nebo delší, knihy pro podložení nakloněné roviny

**Teoretický úvod**

Jestliže postrčíme vozík na nakloněné rovině směrem vzhůru, bude při svém pohybu postupně zpomalovat, dosáhne nejvyššího bodu a začne se vracet zpět. Algebraicky budeme moci vyjádřit vztah mezi polohou a časem jako kvadratickou funkci obecné rovnice $y = ax^2 + bx + c$, kde *y* vyjadřuje polohu vozíku na nakloněné rovině a *x* pak čas. Koeficienty *a*, *b* a *c* jsou hodnoty, které závisí na sklonu nakloněné roviny a hodnotě počáteční rychlosti. Přestože se vozík pohybuje po přímé dráze (trajektorie je přímka), graf závislosti jeho polohy na čase je parabolický.
Grafy kvadratické funkce mají několik důležitých bodů – vrchol (maximum nebo minimum této funkce), průsečík s osou *y* a průsečíky s osou *x* (pokud existují). Průsečíky s osami *x* a *y* jsou spojeny s parametry *a*, *b* a *c* následujícími vztahy:

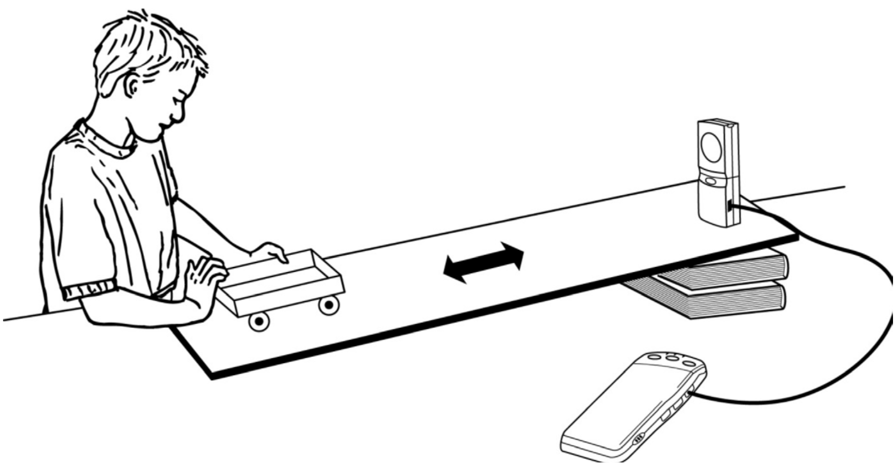
1) $y_1$ ... průsečík s osou *y* je roven hodnotě *c*;

2) $x_1 \cdot x_2$ ... součin průsečíků s osou *x* je roven poměru $\frac{c}{a}$;

3) $x_1 + x_2$ ... součet průsečíků s osou *x* je roven poměru $-\frac{b}{a}$.

Poslední dva vztahy se jmenují Vietovy vzorce.

Tyto vlastnosti znamenají, že pokud známe průsečíky s osami, můžeme najít obecnou rovnici paraboly. Stačí vyřešit soustavu třech rovnic o třech neznámých.
V této aktivitě použijeme detektor pohybu – sonar, abychom změřili změny polohy vozíku na nakloněné rovině v závislosti na čase. Předpokládejme, že se vozík pohybuje bez tření (reálně je tření blízké nule), graf polohy v závislosti na čase bude parabolický a my můžeme použít naměřená data k určení rovnice této paraboly.

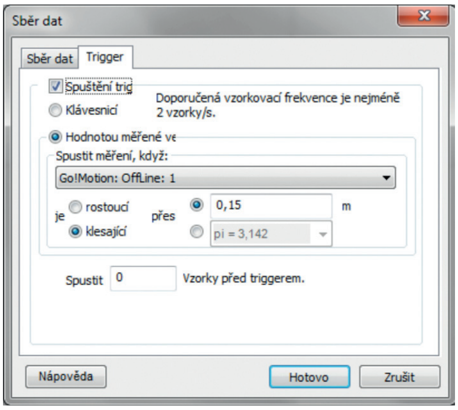


## Jedeme vzhůru!

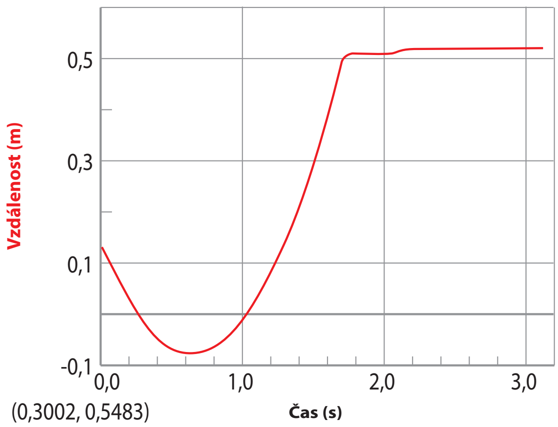


**Vypracování**

1. Vytvořte nakloněnou rovinu. Podložte jeden konec desky nebo kolejnic několika knihami. Úhel sklonu by měl být přibližně 10°. Umístěte sonar na horní konec nakloněné roviny. Vozík by měl být v každém časovém okamžiku od sonaru vzdálen alespoň 0,3 m (sonar nemůže měřit příliš malé vzdálenosti). Pokud tedy máte krátkou desku, podložte sonar jiným předmětem nebo ho upevněte na stativ vedle nakloněné roviny.
2. Zapojte sonar do portu USB počítače.
3. Umístěte vozík přibližně 45 cm od sonaru a vynulujte sonar v této poloze (**Experiment→Nulovat**). Přesná poloha není důležitá, vozík ale musí při měření projet touto polohou při cestě nahoru i zpět.
4. Spusťte program Logger Pro a nastavte měření **Sběr dat** (délka měření 5 s, frekvenci ponechte přednastavenou). Nastavte **Trigger** start měření. Počítač bude měřit, ale začne vykreslovat graf až ve chvíli, kdy vozík projíždí nastavenou pozicí. Protože se vozík přibližuje k sonaru, nastavme klesající funkci a hodnotu například 0,15 m.




5. Vyzkoušejte si uvedení vozíku do pohybu. Musíte ho uvést do pohybu dříve, než je v nulové poloze, a v horní poloze by neměl být příliš blízko sonaru.
6. Spusťte měření a uveďte vozík do pohybu.
7. Měli byste dostat grafickou závislost polohy na čase. Křivka by měla být zcela hladká. Musí obsahovat dva průsečíky s osou *x* (osa času), průsečík s osou *y* a vrchol paraboly musí být pod osou *x* (času). Poraďte se s učitelem, pokud si nejste jisti svými výsledky. Pokud je to nutné, proveďte experiment znovu.




**Analýza dat**

1. Mezi naměřenými daty **vzdálenost jako funkce času** nalezneme úseky lineární, parabolické i jiné. Potřebujeme si vybrat pouze ty parabolické. Jestliže jsme správně nastavili trigger start měření, graf kvadratické funkce začíná v čase $t = 0$ s. Stačí tedy změnit pouze maximum zobrazení časové osy (jako maximum zvolte čas, kdy se vozík ještě pohybuje) a získáme pouze parabolickou část naměřených dat.

2. Nyní již hledejme dva průsečíky s osou *x* a průsečík s osou *y*. Pro přesnější určení těchto průsečíků si můžeme v **Nastavení grafu** nastavit funkci **Interpolovat**. Z grafu odečtené hodnoty zapíšeme do tabulky. Použijeme funkci **Odečet hodnot**. Tyto body mají dvě souřadnice, nás zajímá hodnota *y*, resp. *x*, protože druhá hodnota je vždy nulová.

| průsečík $y_1$ | průsečík $x_1$ | průsečík $x_2$ |
|---|---|---|
| | | |

3. Vypočítejte součin a součet průsečíků grafu kvadratické funkce s osou *x*:

| | |
|---|---|
| $x_1 \cdot x_2$ | |
| $x_1 + x_2$ | |

4. Použijte tyto hodnoty k určení koeficientů *a, b, c* v obecné rovnici paraboly $y = ax^2 + bx + c$. Zapište tyto hodnoty do tabulky.

| parametr | hodnota |
|---|---|
| a | |
| b | |
| c | |

5. Zapište výsledný tvar hledané rovnice paraboly: ______________________.

6. Nyní můžeme přistoupit k zakreslení této paraboly do naměřeného grafu. Označte graf. Vyberte **Analýza→Proložit křivku**. Zvolte **kvadratickou funkci** a **manuální proložení**. Zapište do modelu vámi vypočítané hodnoty koeficientů *a*, *b*, *c*.
7. Prochází vložená křivka naměřenými daty? Je toto proložení přesné?

**Další úkoly**

a. Předpokládejme, že sonar byl umístěn na spodním konci nakloněné roviny. Jak budou vypadat naměřená data? Jaký bude tvar takto získané paraboly? Jaké budou mít hodnoty koeficienty *a*, *b* a *c*? Vysvětlete.
b. Hodnoty koeficientů můžeme také určit pomocí programu Logger Pro automaticky. Musíme zvolit místo manuálního proložení automatické. Odpovídá automatické proložení a koeficienty *a*, *b* a *c* ručnímu proložení, které jste před chvílí dokončili?