

## Pojďme se setkat!

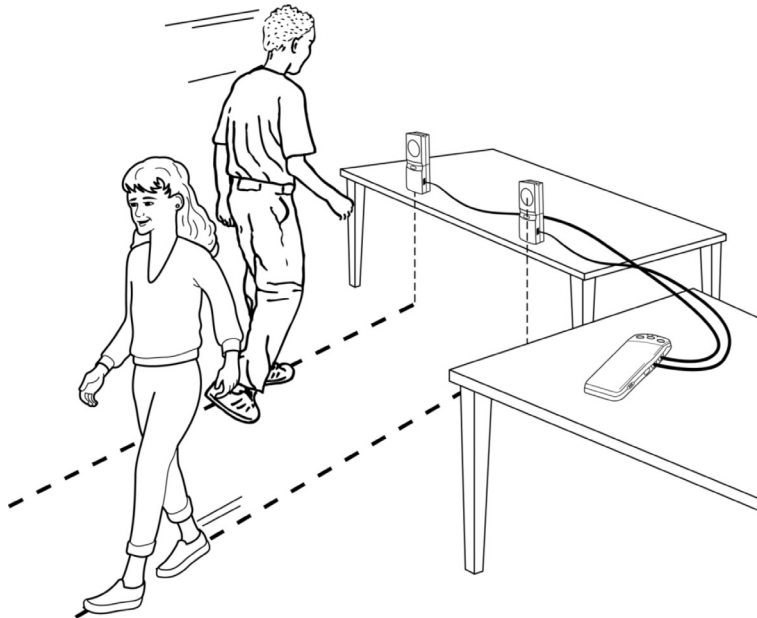
Petra Směšná

- Výstup RVP:** žák měří dané veličiny, analyzuje a zpracovává naměřená data, rozumí pojmu řešení soustavy dvou lineárních rovnic, chápe souvislost rovnoměrného pohybu a lineárních funkcí
- Klíčová slova:** soustavy lineárních rovnic, průsečík dvou přímek, grafické řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

**Laboratorní práce**  
Doba na přípravu:  
**5 min**  
Doba na provedení:  
**90 min**  
Obtížnost:  
**střední**

- Úkol**
- Změřte závislost dráhy a rychlosti na čase pro dva chodce.
  - Najděte rovnice přímek, které popisují pohyb dvou chodců, a najděte jejich průsečík.
  - Vyřešte soustavu dvou lineárních rovnic popisující pohyb obou chodců.

**Pomůcky** Počítač, program Logger Pro, dva detektory pohybu (sonar), metr, stopky



**Teoretický úvod** V běžném životě se můžeme setkávat s problémy, kde se vyskytuje více proměnných a k jejich řešení je třeba soustavy dvou či více matematických rovnic. Dále se budeme zabývat nejjednodušším typem těchto soustav – soustavami dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

Řešením soustavy je uspořádaná dvojice čísel. Když dosadíme za neznámé, dostaneme u obou rovnic platné rovnosti. Pokud znázorníme tuto soustavu rovnic graficky, dostaneme graf dvou přímek. Řešení potom odpovídá souřadnicím průsečíku těchto přímek (pokud takový průsečík existuje).

Pokud se člověk pohybuje rovnoměrným pohybem v jednom směru, pak jeho vzdálenost v závislosti na čase určuje lineární funkce  $y = kx + q$ , kde  $y$  značí vzdálenost,  $x$  je čas,  $q$  je počáteční vzdálenost (v čase  $x = 0$ ) a  $k$  odpovídá rychlosti pohybu. Budeme-li mít dvě pohybující se osoby, dostáváme dvě lineární rovnice o dvou neznámých, kterým odpovídají grafy dvou přímek.

V této úloze budeme modelovat takový případ, kdy jdou dvě osoby proti sobě a potkají se. Matematicky tuto situaci znázorníme graficky i pomocí soustavy dvou lineárních rovnic.

- Vypracování**
- Postavte detektory pohybu na stůl tak, aby mířily rovnoběžně do otevřeného prostoru, a připojte je k počítači. Detektory by měly být od sebe vzdáleny alespoň 1,5 m.
  - Nastavte dobu měření na 8 s (**Experiment** → **Sběr dat**).
  - Budete potřebovat celkem 4 lidi. Dva budou chodit před detektory, třetí bude stopovat čas na stopkách a čtvrtý člověk označí místo, kde se dva chodci budou míjet.

## Pojďme se setkat!

Samotné měření bude probíhat tímto způsobem: chodci si stoupnou před detektory – jeden ve vzdálenosti 0,5 m před prvním detektorem, druhý ve vzdálenosti 3 m od druhého detektoru. Až zahájíme měření, první člověk se rozejde směrem od detektoru a druhý člověk směrem k detektoru. Jakmile započne měření, spustí třetí člověk stopky. Zastaví je ve chvíli, kdy dva chodci budou procházet kolem sebe (= potkají se). V té chvíli čtvrtý člověk označí například samolepkou místo, kde se potkali. Chodci pokračují dál. První se zastaví 3 m od detektoru, druhý 0,5 m před detektorem (tyto hodnoty berte jako přibližné).

Je vhodné si toto měření několikrát vyzkoušet. Důležité je, aby v naměřeném grafu nebyly skokové změny nebo prázdná místa.

- 4) Spusťte měření a postupujte podle předchozího kroku.
- 5) Prozkoumejte graf závislosti vzdálenosti na čase. Pro prvního chodce by měl být lineárně rostoucí, pro druhého chodce lineárně klesající.
- 6) Po úspěšném měření nechte čtvrtého člověka, ať změří vzdálenost místa, kde se chodci potkali, od spojnice detektorů. Tuto vzdálenost, stejně jako čas na stopkách, zapište do tabulky.

- Analýza dat**
- 1) Jak poznáte z grafu, která křivka odpovídá kterému chodci? Označte si je.
  - 2) Klikněte na graf, aby se stal aktivním, a stiskněte tlačítko **Odečet hodnot**.
  - 3) Zaznamenejte do tabulky souřadnice bodu, kde se obě křivky protínají (jako místo a čas setkání).

	stopky, metr	graf	rovnice
čas setkání			
místo setkání			

	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	směrnice	průsečík s osou y
první chodec						
druhý chodec						

- 4) Budeme chtít zjistit rovnice přímk, které odpovídají grafu pohybu jednotlivých chodců. K tomu budeme potřebovat souřadnice dvou bodů křivky grafu od každého chodce. Při tomto odečítání ignorujte jakékoliv horizontální části na začátku, nebo na konci měření. Je vhodné zvolit vzdálené body.

Zaznamenejte tyto body do tabulky.

- 5) Pomocí těchto bodů spočítejte směrnice  $k$  daných přímk. Použijte vztah

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Co v našem případě znázorňuje směrnice (jaké má jednotky)?

- 6) Pomocí rovnice  $y = kx + q$  spočítejte průsečík s osou  $y$  (neboli číslo  $q$ ). Spočítejte tento průsečík pro oba chodce.
- 7) Zapište si rovnice přímk, které odpovídají grafu, pro oba chodce.
- 8) Proložte naměřená data grafy přímk, jejichž rovnice jste spočítali.
  - a) Nejprve pro prvního chodce; klikněte na **Analýza** → **Proložit křivku**, označte **Poslední měření | vzdálenost 1** a stiskněte OK.
  - b) Vyberte Manuální aproximaci a v panelu rovnic zaškrtněte (lineární). Je to analogie k běžnému výrazu  $y = kx + q$ .
  - c) Do parametrů zapište směrnici a průsečík s osou  $y$ , které jste spočítali, pro prvního chodce. Po kliknutí na OK se vrátíte do grafu.
  - d) Nyní opakujte postup i pro druhého chodce.
- 9) Nakolik odpovídají proložené přímky naměřeným hodnotám?
- 10) Nyní můžete zjistit průsečík těchto dvou přímk a početně. Zapište si rovnice obou přímk pod sebe. Dostáváte tím soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Řešením soustavy jsou hodnoty  $x$  a  $y$ , které odpovídají oběma rovnicím. V našem případě

jsou to hodnoty času a vzdálenosti, které měli naši chodci společné (místo a čas, kdy se chodci potkali). Vyřešte tuto soustavu dvou lineárních rovnic a její řešení zapište do tabulky.

- 11) Porovnejte zjištěné časy a vzdálenosti, které jste změřili, odečetli z grafu a dostali jako řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Liší se tyto hodnoty?
- 12) Pokud řešíme soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, může řešení dopadnout trojím způsobem:
  - a) soustava má jedno řešení,
  - b) soustava má nekonečně mnoho řešení,
  - c) soustava nemá žádné řešení.

Jak bude vypadat graf dvou lineárních funkcí, aby jejich soustava měla jedno, nekonečně mnoho, žádné řešení? Jakým způsobem by bylo třeba upravit pohyb chodců, abyste takovéto grafy dostali? Vyzkoušejte.