

DUM č. 8 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 05.06.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Funkce - definice odmocninné funkce, graf, pravidla výpočtů s odmocninami, racionální exponent, sada úloh s výsledky

Materiály jsou určeny pro bezplatné používání pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název DUMu: Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 17.12.2012

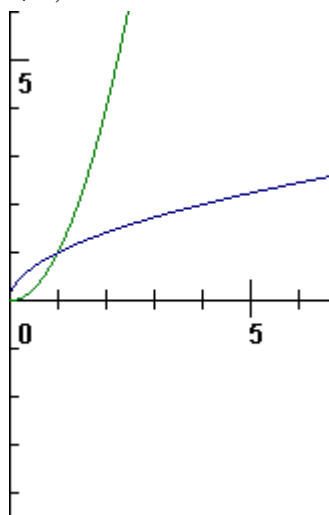
Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF

Anotace DUMu: Funkce - definice odmocninné funkce, graf, pravidla výpočtů s odmocninami, racionální exponent, sada úloh s výsledky

8. FUNKCE – ODMOCNINNÉ FUNKCE, ÚPRAVY VÝRAZŮ S ODMOCNINAMI, ROVNICE S NEZNÁMOU POD ODMOCNINOU**Odmocninné funkce**

Jsou inverzní funkce k mocninným funkcím typu 1 na intervalu $[0; \infty[$ (aby byla zajištěna bijektivita mocninné funkce)

$$f(x) = \sqrt[n]{x}; n \in \mathbb{N}$$



Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je n -tá odmocnina z nezáporného čísla a takové nezáporné číslo b , pro něž platí $b^n = a$. Budeme zapisovat $b = \sqrt[n]{a}$.

n ...odmocnitel

a ...odmocnivec

Vzorce pro počítání s odmocninami: $(n, m, p \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}^+)$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; (b \neq 0)$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \times p]{a^p}$$

Racionální mocnitel:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; (m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}; a \geq 0)$$

Rovnice s neznámou pod odmocninou (iracionální rovnice) řešíme vhodným umocňováním rovnice, zkouška je nutnou součástí řešení.

Příklady:

1) Načrtněte grafy odmocninných funkcí, určete D_f a H_f

a. $f(x) = \sqrt{x+2}$

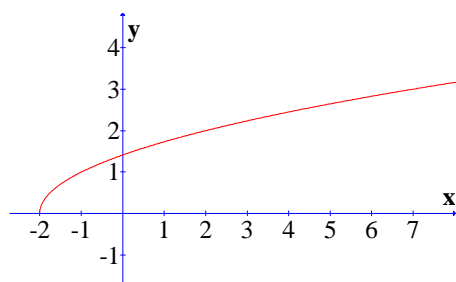
b. $f(x) = \sqrt{x} + 2$

c. $f(x) = -2\sqrt{x-1} + 3$

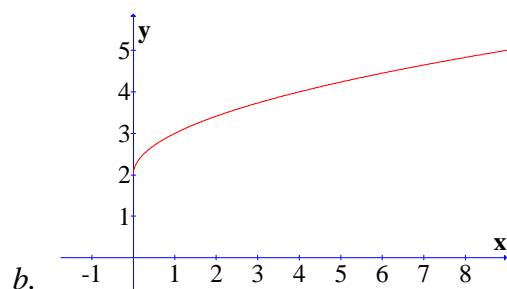
d. $f(x) = \sqrt[5]{x} - 1$

e. $f(x) = 2\sqrt[3]{x-2}$

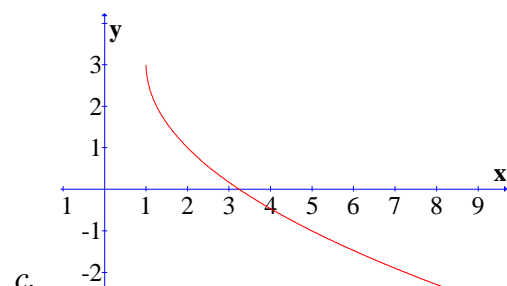
Výsledky:



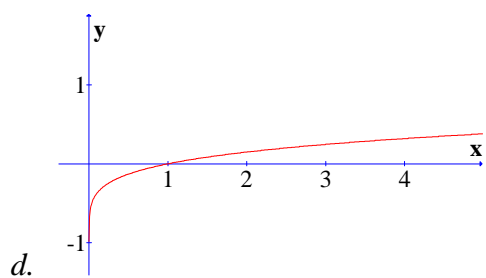
a. $D_f = \langle -2; +\infty \rangle; H_f = \langle 0; +\infty \rangle$



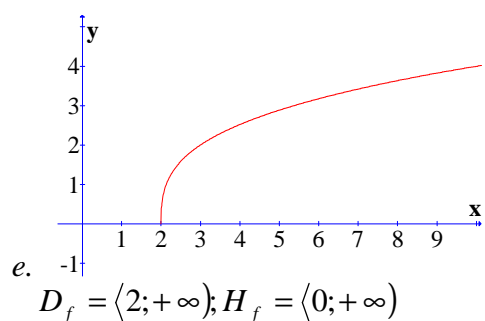
b. $D_f = \langle 0; +\infty \rangle; H_f = \langle 2; +\infty \rangle$



c. $D_f = \langle 1; +\infty \rangle; H_f = \langle -\infty; 3 \rangle$



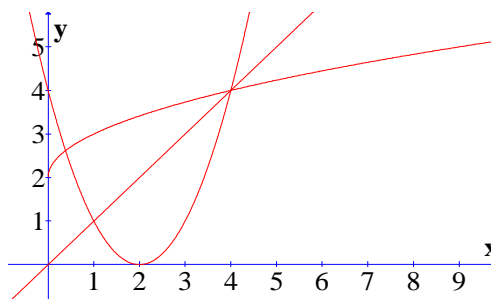
$$D_f = \langle 0; +\infty \rangle; H_f = \langle -1; +\infty \rangle$$



$$D_f = \langle 2; +\infty \rangle; H_f = \langle 0; +\infty \rangle$$

- 2) Načrtněte do jedné soustavy souřadnic grafy funkcí $f(x) = (x-2)^2$ a $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$.
Co lze o těchto funkcích říci?

Výsledek:



Na intervalu $\langle 2; +\infty \rangle$ se jedná o inverzní funkce

2) Zjednodušte(MZLU):

$$a) \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right) - \frac{3}{x-1}$$

$$b) \left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}-x}{\sqrt{a}+2}\right) \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}}\right)$$

Výsledky:

a) 4

b) 8

3) Vypočtete: (MZLU)

$$a) \frac{\left(10^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}} \quad b) \frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{8}}}$$

$$c) \frac{\sqrt{6} \cdot 12^{-\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{4^{-1}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{8}}$$

Výsledky:

a) 2^4

b) $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

$\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{2}$

4. (VŠE) Zjednodušte výrazy a výsledek zapište ve tvaru odmocniny:

Výsledky:

$$a) \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \div (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

a) 1

$$b) \sqrt{a^3 \sqrt{b^{-1}}} \div \sqrt[3]{b^2 \sqrt{a}} + \sqrt[6]{b} \div b$$

b) $\frac{1 + \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{b^5}}$

$$c) \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a}$$

c) $\sqrt[12]{a^{23}}$

$$d) \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[3]{x \sqrt{x}}$$

$$d) \sqrt[6]{x^7}$$

$$e) \sqrt[5]{\left(\frac{\sqrt{m} \cdot m^{-2}}{m^{1/3}}\right)^{-2}}$$

$$e) \sqrt[15]{m^{11}}$$

$$f) \frac{\sqrt[3]{a^{-2}} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{\sqrt{a^4}} \cdot \sqrt{a^{-3}}}$$

$$f) \sqrt[3]{a^5}$$

$$g) \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3}}$$

$$g) \sqrt[24]{\left(\frac{a}{b}\right)^{29}}$$

$$h) \sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{4a^2b^4} \cdot \sqrt[4]{8a^3b^7} \cdot \sqrt[12]{2a^3b^9}$$

$$h) \sqrt{2^3} \cdot \sqrt[6]{a^{13}b^{26}}$$

5. (VŠE) Zjednodušte výrazy a určete, pro jaké hodnoty proměnných mají smysl:

$$a) [(c^2 - 1) + 1]^{-2} \div (1 - c^{-4}) + \sqrt{\frac{\sqrt{c} \cdot \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c^4} \sqrt{c^3}}}$$

Výsledky: a) $\frac{c^3 + c^2 - c + 1}{c(c^2 + 1)}$,

$$c \neq \pm 1 \wedge c > 0$$

$$b) \frac{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}{b} \div \left[\left(\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt{a^3}} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}} \right)^2 \right]$$

b) a, $a > 0 \wedge b > 0$

$$c) \left(\frac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}} - \frac{2\sqrt{2}}{a^{-1}} \right) \cdot \frac{a^{-3}}{1-a^2}$$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{a^2}$, $a \neq \pm 1 \wedge a \neq 0$

6. (MZLU) Řešte v R:

$$1) \sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 2$$

Výsledky:

1) nemá řešení

$$2) \sqrt{1+7x} + \sqrt{1-7x} = \sqrt{14x}$$

$$2) \frac{1}{7}$$

$$3) \sqrt{4+2x} + \sqrt{4-2x} = \sqrt{8x}$$

$$3) \frac{8}{5}$$

$$4) \sqrt{5x+4} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x+1}$$

$$4) 1$$

$$5) \sqrt{5x+7} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+3}$$

$$5) -\frac{1}{11}$$

$$6) \sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+1} = \sqrt{7x+2}$$

$$6) 1$$

$$7) \sqrt{2x} + \sqrt{x-3} = \sqrt{x-3} + 2$$

$$7) 4; 7$$

$$8) \sqrt{4x^2} - \sqrt{8x+5} = 2x+1$$

$$8) -\frac{1}{2}$$

$$9) 1 + \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x$$

$$9) \frac{5}{4}$$

$$10) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$$

$$10) \frac{5}{3}$$

$$11) \frac{1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$$

$$11) \pm \frac{1}{2}$$

7. (VŠE) Řešte v R:

Výsledky:

$$1) \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

$$1) \frac{25}{16}$$

$$2) \sqrt{\frac{7-x}{3+x}} + 3\sqrt{\frac{3+x}{7-x}} = 4$$

$$2) \pm 2$$

$$3) \sqrt{1 + x\sqrt{x}} = 1 - x$$

$$3) 0$$

$$4) \sqrt{x\sqrt{x} - x} + \sqrt{x} = x$$

$$4) 0; 1; 4$$

$$5) \sqrt{x + \frac{3}{2}} - \sqrt{x - \frac{1}{2}} = 2$$

5) nemá řešení

$$6) x^2 + 5x + 4 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 0$$

$$6) -9; 4$$

$$7) \sqrt{\frac{3}{x} + 5} + \sqrt{10 - \frac{1}{x}} = \frac{15}{\sqrt{10 - \frac{1}{x}}}$$

$$7) -\frac{4}{5}; \frac{1}{5}$$

$$8) 3\sqrt[10]{x^2 - 3} + \sqrt[5]{x^2 - 3} = 4$$

$$8) \pm 2 \text{ (substituce)}$$

$$9) \sqrt[4]{x-5} = 30 - \sqrt{x-5}$$

$$9) 630$$

Literatura:

1) Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9

2) Matematika – příklady pro přijímací zkoušky, RNDr. Petr Rádl a kolektiv, ISBN 80-7157-625-5