

DUM č. 9 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 05.06.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Funkce - goniometrické funkce, grafy, jednotková kružnice, základní vztahy mezi funkcemi, míra stupňová a oblouková, jednoduché rovnice, sada úloh s výsledky

Materiály jsou určeny pro bezplatné používání pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název DUMu: Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

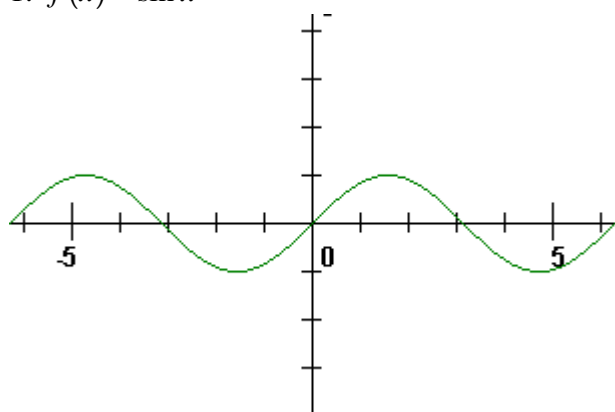
Datum: 29.1.2013

Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF

Anotace DUMu: Funkce - goniometrické funkce, grafy, jednotková kružnice, základní vztahy mezi funkcemi, míra stupňová a oblouková, jednoduché rovnice, sada úloh s výsledky

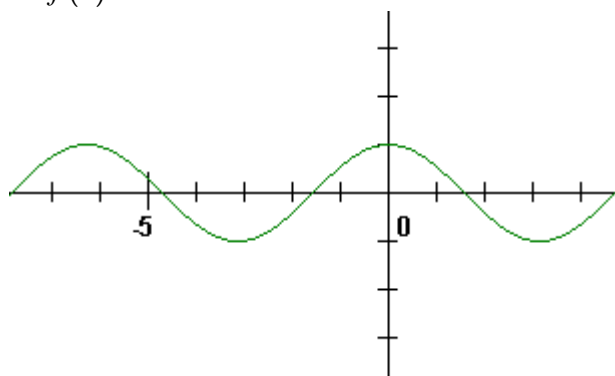
9. FUNKCE: GONIOMETRICKÉ FUNKCE A ROVNICE, ZÁKLADNÍ VZTAHY

1. $f(x) = \sin x$



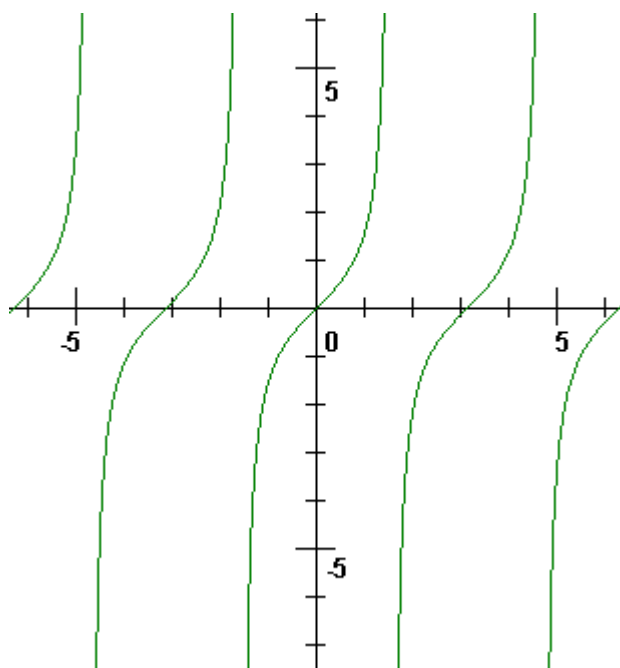
funkce lichá, omezená, periodická s periodou 2π ; $D_f = R$

2. $f(x) = \cos x$



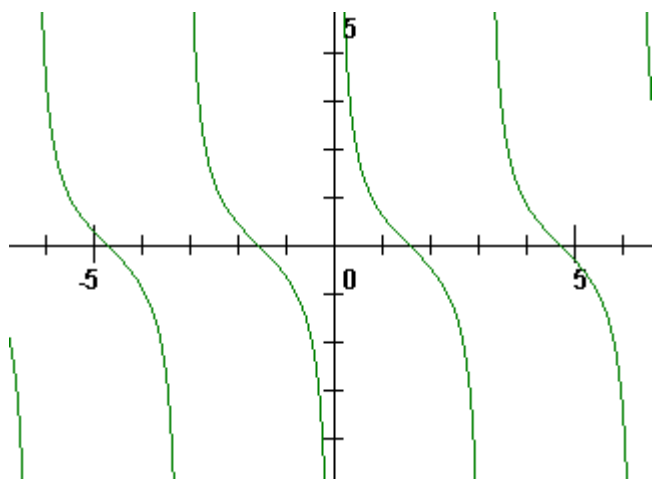
funkce sudá, omezená, periodická s periodou 2π ; $D_f = R$

3. $f(x) = \operatorname{tg} x$



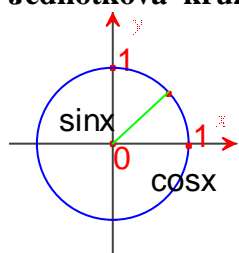
funkce lichá, neomezená, rostoucí, periodická s periodou π ; $D_f = R - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$

4. $f(x) = \operatorname{cot} gx$



funkce lichá, neomezená, periodická s periodou π ; $D_f = R - \{k\pi\}$

Jednotková kružnice:



Základní vztahy

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

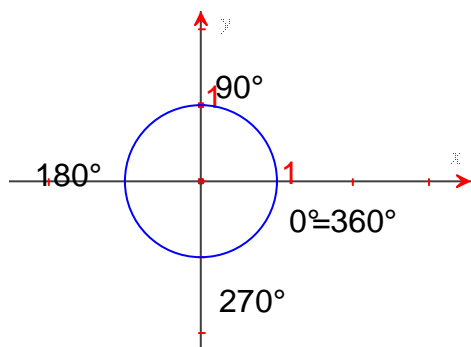
$$\sin(\pi/2 + x) = \cos x$$

$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$$

Míra stupňová



1 minuta = 1/60 stupně

1 vteřina = 1/60 minuty

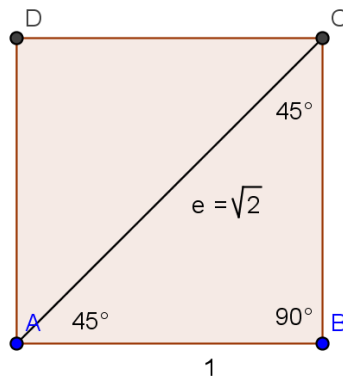
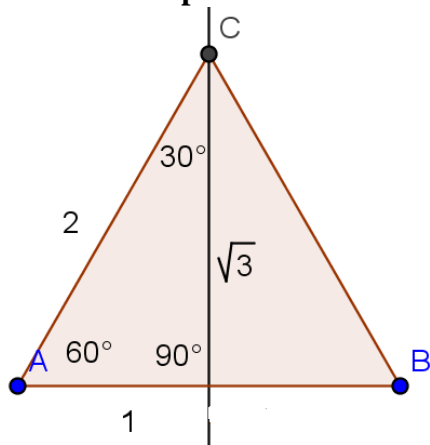
Míra oblouková

1 rad = 57°17'45'' (=úhel, který odpovídá oblouku na kružnici o délce poloměru kružnice)

převod : $180^\circ = \pi \text{ rad}$

$$\left(30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \right)$$

pomůcka na zapamatování hodnot funkcí 30°, 60° a 45°



Goniometrické rovnice

S výjimkou $\sin x = \pm 1$, $\cos x = \pm 1$ má rovnice

$$\sin x = r \quad -1 < r < 1$$

$$\cos x = r \quad -1 < r < 1$$

vždy dvě množiny řešení na R .

Rovnice $\operatorname{tg} x = r$, $\operatorname{cot} x = r$ $r \in R$ má vždy jednu množinu řešení na R .

Příklady:

1. (VŠE) Určete hodnoty funkcí, je-li :

a) $f(x) = \sin 2x \quad \wedge \quad x = \frac{17}{6}\pi$

b) $f(x) = \sin x + \cos^2 x \quad \wedge \quad x = \frac{17}{6}\pi$

c) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x \quad \wedge \quad x = \frac{17}{6}\pi$

d) $f(x) = \frac{5 \sin x + \cos x}{2 \cos x - 3 \sin x} \quad \wedge \quad \operatorname{tg} x = 5$

e) $f(x) = \frac{3 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x} \quad \wedge \quad \operatorname{tg} x = -7$

Výsledky :

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{5}{4}$

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) -2

e) $-\frac{10}{11}$

2. (VŠE) Určete reálné číslo x , pro které platí :

$$x = \sin \frac{5}{4}\pi - \cos \frac{4}{3}\pi + \operatorname{tg} \frac{5}{3}\pi - \operatorname{cot} g \frac{11}{6}\pi$$

Výsledek : $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

3. (VŠE) Vypočítejte hodnoty všech goniometrických funkcí úhlu α , je-li

a) $\sin \alpha = -\frac{1}{5} \quad \wedge \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

b) $|\operatorname{cot} g \alpha| = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

$$c) \alpha = -945^\circ$$

Výsledky :

$$a) \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12} \quad \cot g \alpha = 2\sqrt{6}$$

$$b) \sin \alpha = \frac{2}{3} \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \cot g \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$c) \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha = -1 \quad \cot g \alpha = -1$$

4. (VŠE) Určete definiční obor funkce:

$$\text{Výsledky : } a) \langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a) f(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$b) f(x) = \log(\sin x)$$

$$c) f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$$

$$d) f(x) = \log(\operatorname{tg} x)$$

$$e) f(x) = \sqrt{\log(\operatorname{tg} x)}$$

$$c) \left\langle 0 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \left\langle 0 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$e) \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle \quad k \in \mathbb{Z}$$

5. (VŠE) Určete reálné koeficienty a, b tak, aby graf funkce $f(x) = a \cdot \operatorname{tg} x + b$ procházel body A a B.

Rozhodněte, zda na grafu této funkce leží body C a D.

$$A = [\pi; -1] \quad B = \left[\frac{\pi}{4}; 1 \right] \quad C = \left[\frac{\pi}{2}; 0 \right] \quad D = \left[\frac{3\pi}{4}; -3 \right]$$

Výsledek: $f(x) = 2\operatorname{tg} x - 1$, C neleží, D leží

6. (VŠE) Určete reálné koeficienty a, b tak, aby graf funkce $f(x) = a \cdot \sin x + b$ procházel body A a B. Rozhodněte, zda na grafu této funkce leží body C a D.

$$A = [0; 1] \quad B = \left[\frac{\pi}{2}; 3 \right] \quad C = [-\pi; 1] \quad D = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2} \right]$$

Výsledek: $f(x) = 2\sin x + 1$, C leží, D neleží

7. (MZLU) Řešte v R:

$$a) \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$$

$$b) \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2 \cos x$$

$$c) 8 \sin x + 5 = 2 \cos 2x$$

$$d) \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} x = 0$$

$$e) 2 \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1 - \sin x$$

$$f) \frac{\cos x(1 + \cos x - \sin^2 x)}{\sin^2 x(1 + \cos x)} = 3$$

$$\text{Výsledky: } a) -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 2k\pi \quad k \in Z$$

$$b) \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in Z$$

$$c) \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in Z$$

$$d) \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in Z$$

$$e) 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 4k\pi; \frac{5\pi}{3} + 4k\pi \quad k \in Z$$

$$f) \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad k \in Z$$

8. (VŠE) Řešte v R:

$$a) 2 \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{5}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{3}} \cot g\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$d) 3 \operatorname{tg}^2 x + 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x + 3 = 0$$

$$e) \sin 4x = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$f) \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$$

$$g) \sin^2 x + \sin^2 2x = 1$$

$$h) \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

$$i) \sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$$

$$j) \sin 3x = \sin 2x - \sin x$$

$$\text{Výsledky: } a) \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \quad k \in Z$$

$$b) \frac{\pi}{6} + k\pi \quad k \in Z$$

$$c) \frac{11\pi}{4} + 3k\pi \quad k \in Z$$

$$d) \frac{5\pi}{6} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad k \in Z$$

$$e) \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + k\pi; \frac{3\pi}{8} + k\pi \quad k \in Z$$

$$f) \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad k \in Z$$

$$g) (2k+1)\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad k \in Z$$

$$h) \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad k \in Z$$

$$i) 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad k \in Z$$

$$j) k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in Z$$

$$k) \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad k \in Z$$

$$l) \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in Z$$

$$l) 2 \cos 4x - \sqrt{2} \cos x = 2 \sin^2 x$$

9. (VŠE) Najděte všechna řešení rovnice v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$

a) $\sqrt{5 \sin x + \cos 2x} + 2 \cos x = 0$

Výsledky: a) $\frac{5\pi}{6}$

b) $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$

b) $0; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; 2\pi$

c) $\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

c) $\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}; \frac{23\pi}{12};$

d) $\operatorname{tg}^2 x + 4 \sin^2 x - 3 = 0$

d) $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4};$

10. (VŠE) Řešte rovnice pro $x \in (-\pi; 2\pi)$

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

Výsledky: a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

b) $-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$

c) $\operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

c) $-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$

d) $\cot g\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

d) $-\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$

11. (VŠE) Řešte goniometrickou rovnici

a) $\sin 2x = \operatorname{tg} x \wedge 0 \leq x \leq 2\pi$

Výsledky: a) $0; \pi; 2\pi; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$

b) $\cot g\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} \wedge x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

b) $\frac{\pi}{24}; \frac{13\pi}{24}; \frac{25\pi}{24}; \frac{37\pi}{24};$

12. (VŠE) Řešte soustavu rovnic

a) $\begin{cases} x + y = \pi \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sin x - \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2 \end{cases}$

Výsledky:

a) $\left[\frac{5\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]; \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

b) $\left[\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]; \left[2\pi + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\right]; \left[\frac{\pi}{6} + k\pi; 0 + k\pi\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 + 2k\pi\right]; \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right]$

Literatura:

1) Sbírká příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9

2) Matematika – příklady pro přijímací zkoušky, RNDr. Petr Rádl a kolektiv, ISBN 80-7157-625-5