

DUM č. 10 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 04.06.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Funkce - goniometrické funkce, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, grafy typu $f(x)=A\sin(ax+b)+B$, sada úloh s výsledky

Materiály jsou určeny pro bezplatné používání pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název DUMu: Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 22.1.2013

Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF

Anotace DUMu: Funkce - goniometrické funkce, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, grafy typu $f(x)=A\sin(ax+b)+B$, sada úloh s výsledky

10.FUNKCE: VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI, GRAFY

Vzorce :

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cot x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

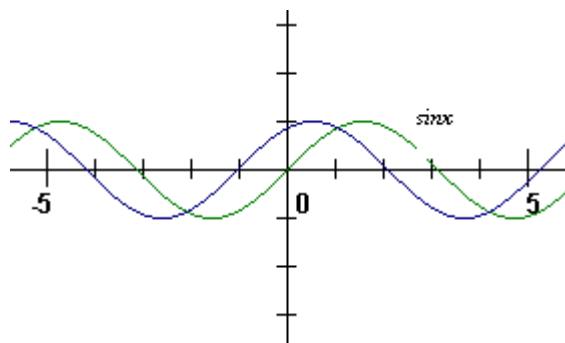
$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

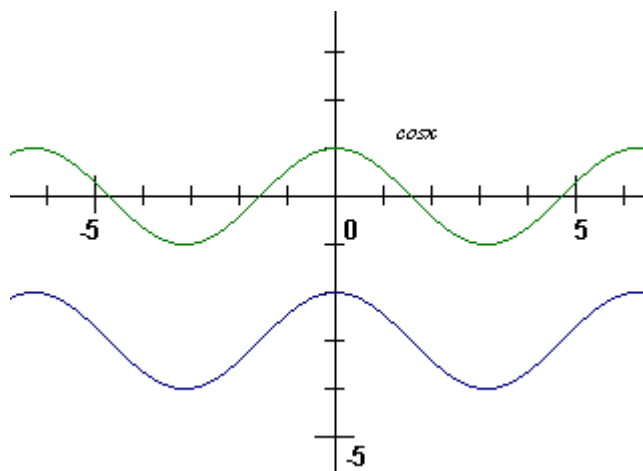
GRAFY TYPU $f(x)=A\sin(ax+b)+B$

b. . . . jen posunutí grafu doprava, nebo doleva

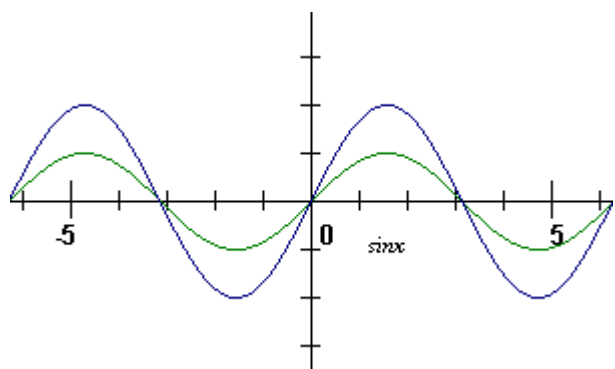
např. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ $O\left(-\frac{\pi}{3}; 0\right)$



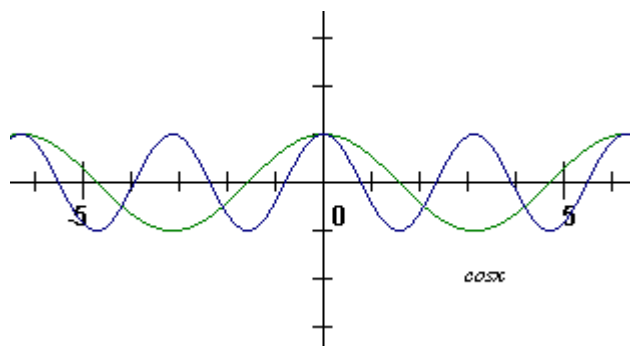
B. . . . posunutí grafu nahoru nebo dolů
 např. $f(x) = \cos x - 3$ $O(0; -3)$



A. . . . mění velikost amplitudy
 např. $f(x) = 2 \sin x$



a počet základních křivek v 2π
 např. $f(x) = \cos(2x)$



Příklady:

1. (VŠE) Vypočítejte $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$

je-li:

$$a) \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \wedge \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$$

$$b) \sin \alpha = -\frac{2}{3} \wedge \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$$

Výsledky:

$$a) \sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$b) \sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{9}$$

2. (VŠE) Vypočtěte

$$a) \frac{2\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha} \quad \text{pokud} \quad \operatorname{tg} \alpha = 3 \quad \text{Výsledky: } a) \frac{11}{4}$$

$$b) \frac{1 + \cos \alpha + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad \text{pokud} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \wedge \cos \alpha = -\frac{12}{13} \quad b) \frac{6}{25}$$

3. (VŠE) Vypočtěte všechny průsečíky funkcí f a g definovaných předpisy:

$$a) f(x) = \sin 2x, \quad g(x) = \cos x$$

$$b) f(x) = \sin 2x, \quad g(x) = -\sqrt{2} \cos x$$

$$\text{Výsledky: } a) \left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0 \right], \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\sqrt{3}}{2} \right], \left[\frac{5}{6}\pi + 2k\pi; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0 \right], \left[\frac{5}{4}\pi + 2k\pi; 1 \right], \left[\frac{7}{4}\pi + 2k\pi; -1 \right] \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. (MZLU) Nakreslete graf funkce $y = f(x)$ pro $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$ a určete průsečíky s osami:

$$a) y = \sin 2x$$

$$b) y = \cos \frac{x}{2}$$

$$c) y = 2 \sin x$$

$$d) y = |2 \cos x|$$

$$e) y = \sin x + 1$$

$$f) y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$g) y = \operatorname{tg} 2x$$

$$h) y = \cot g \frac{x}{2}$$

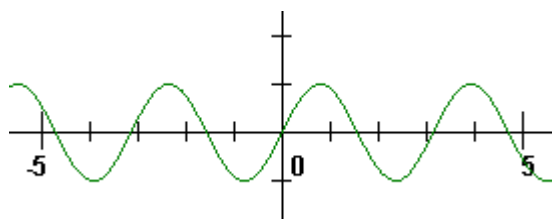
$$i) y = \operatorname{tg} x - 0,5$$

$$j) y = \cot g \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$k) y = -\left| \cot g \frac{x}{2} \right|$$

$$l) y = \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

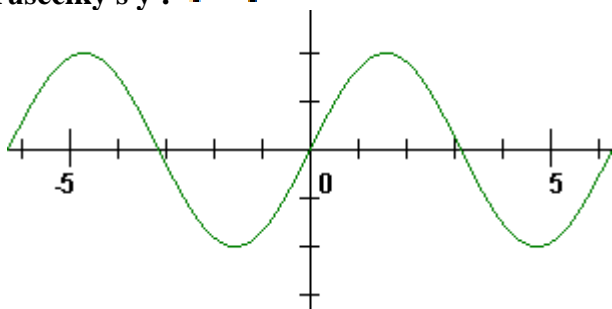
Výsledky:



a)

průsečíky s x : $-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

průsečíky s y : $[0; 0]$

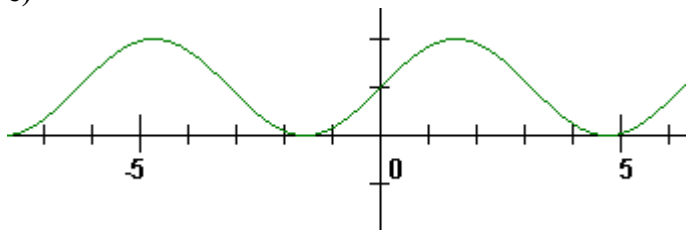


c)

průsečíky s x : $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$

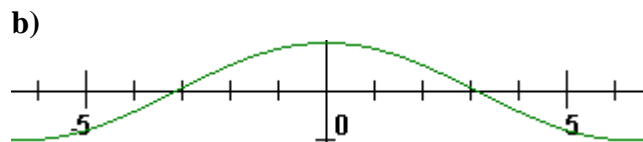
průsečíky s y : $[0; 0]$

e)



průsečíky s x : $[-\frac{\pi}{2}; 0], [\frac{3\pi}{2}, 0]$

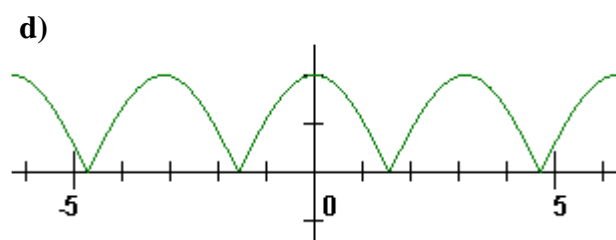
průsečíky s y : $[0; 1]$



b)

průsečíky s x : $-\pi, \pi,$

průsečíky s y : $[0; 1]$

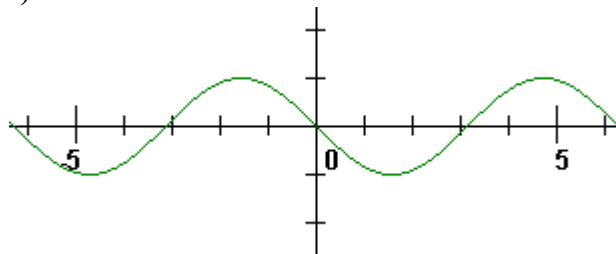


d)

průsečíky s x : $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

průsečíky s y : $[0; 2]$

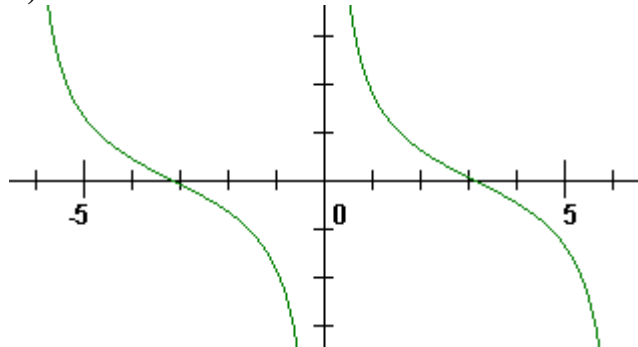
f)



průsečíky s x : $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$

průsečíky s y : $[0; 0]$

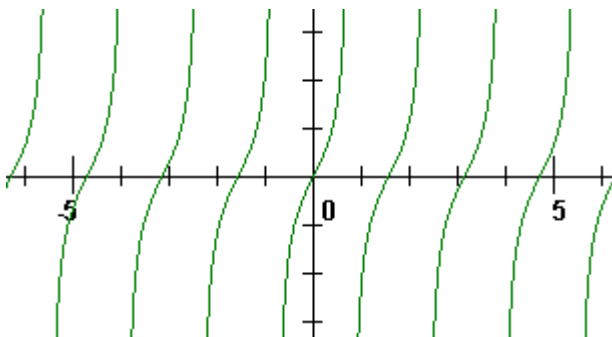
h)



průsečíky s x : $-\pi, \pi$

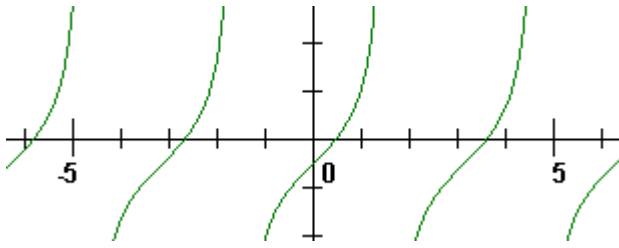
průsečíky s y : nejsou

g)



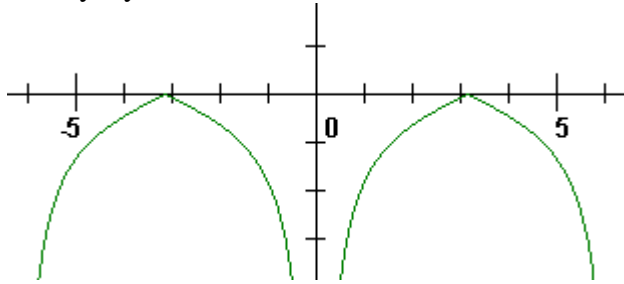
průsečíky s x : $-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

průsečíky s y : $[0; 0]$



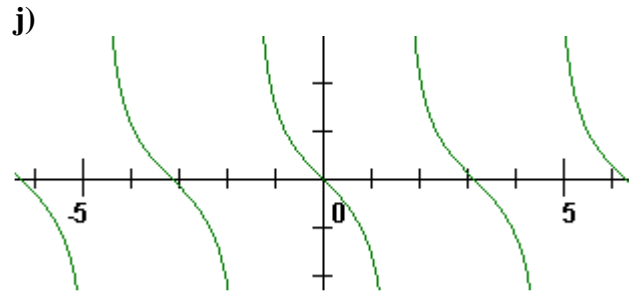
i)

průsečíky s x : $[\frac{\pi}{6}; 0], [\frac{7\pi}{6}; 0], [-\frac{5\pi}{6}; 0], [-\frac{11\pi}{6}; 0]$
 průsečíky s y : $[0; -0,5]$



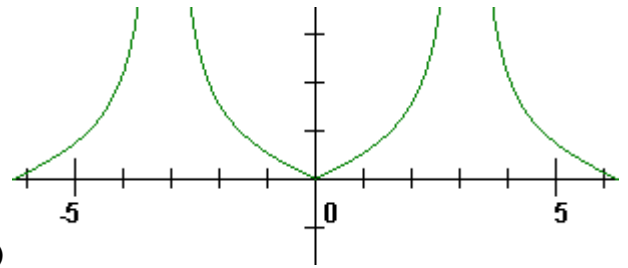
k)

průsečíky s x : $[-\pi; 0], [\pi; 0]$
 průsečíky s y : nejsou



j)

průsečíky s x : $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$
 průsečíky s y : $[0; 0]$



l)

průsečíky s x : $[-2\pi; 0], [0; 0], [2\pi; 0]$
 průsečíky s y : $[0; 0]$

5. Načrtněte graf funkce na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$

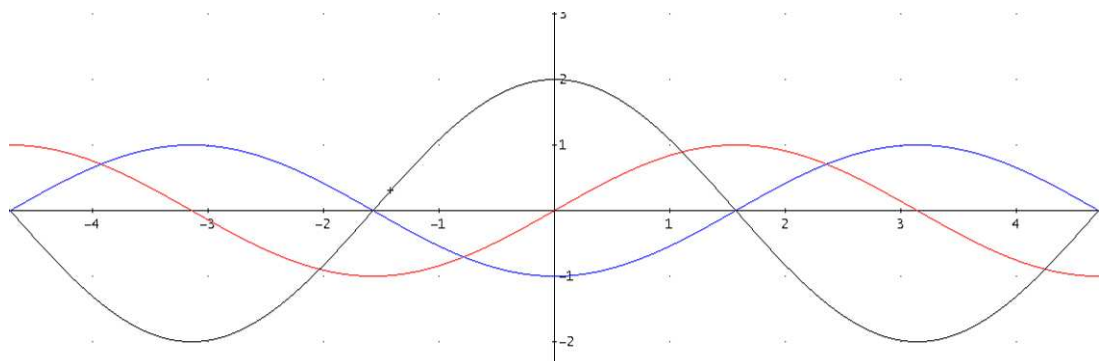
a) $y = -2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

a) $y = \sin(x + \pi) + 2$

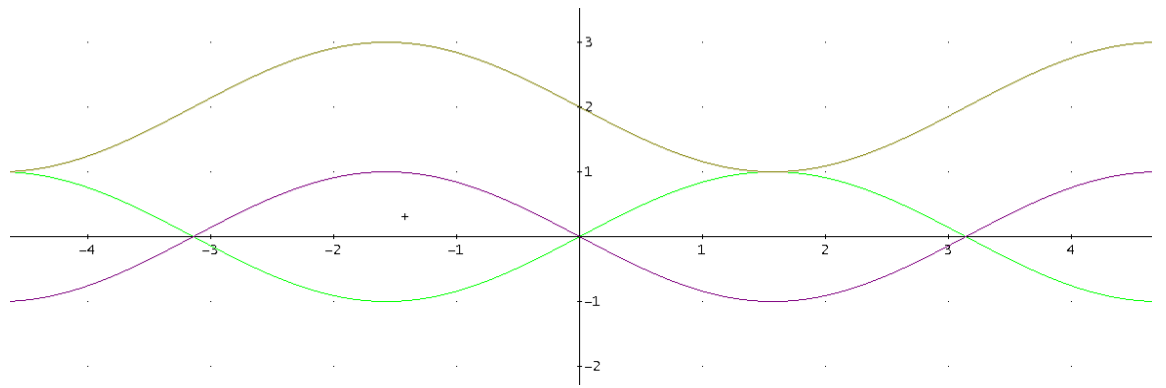
b) $y = \frac{5}{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

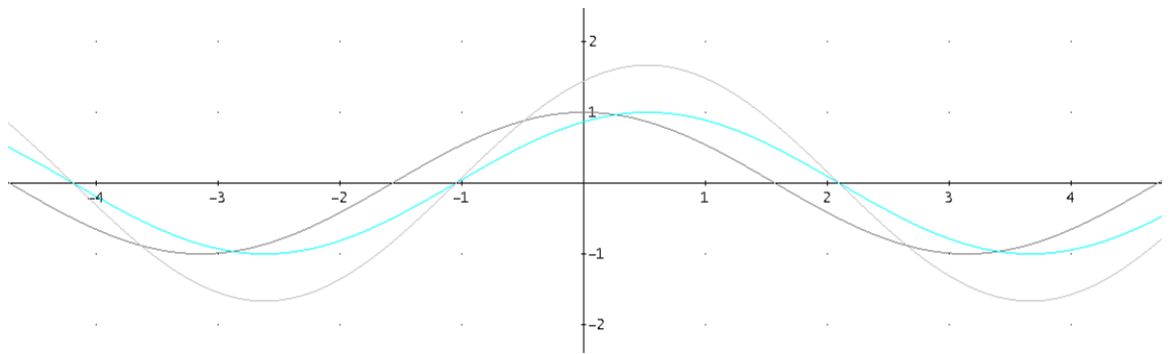
a)



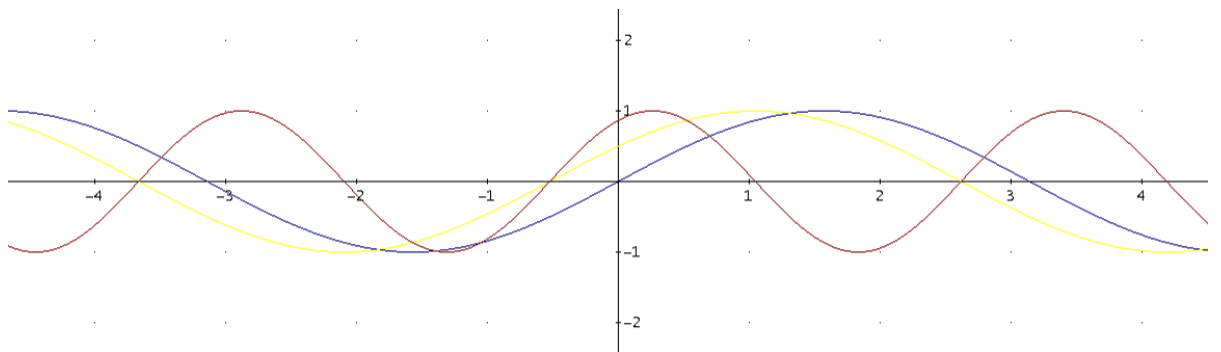
b)



c)



d)



6. (VŠE) Pro všechny přípustné hodnoty zjednodušte výrazy:

$$a) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$b) \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$c) \frac{1}{1 - \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \sin \alpha}$$

$$d) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{cot}^2 \alpha}$$

$$e) \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2 \sin x + \sin 2x}$$

$$f) \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$$

$$g) \frac{\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)}{\operatorname{cot}^2(x - 2\pi)} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cot}^2\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)}$$

$$h) \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$$

Výsledky: a) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ b) $1 - \cos \alpha$

c) $\frac{\sin \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$ d) 1 e) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

f) 1 g) 1 h) $\operatorname{tg} \alpha$

7. (VŠE) Zjednodušte výraz:

$$a) \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-x)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

Výsledky: a) 1 b) 0

$$b) \frac{\operatorname{tg} 8\pi - \operatorname{cot} g \frac{7\pi}{2} + \sin 3\pi}{1 + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{cot} g \frac{\pi}{4}}$$

8. (MZLU) Zjednodušte výrazy:

$$a) \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos x - \cos^3 x}$$

$$b) \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$$

$$c) \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x}$$

$$d) \frac{\cos 2x + \sin^2 x}{1 + \cos 2x}$$

$$e) \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cot^2 x}$$

$$f) \frac{(1 + \operatorname{tg} x)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

Výsledky: a) $\cot x$ b) $\cot^2 x$

c) $\operatorname{tg} x$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\operatorname{tg}^4 x$

f) $(\cos x + \sin x)^2$

Literatura:

1) Sběrka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9

2) Matematika – příklady pro přijímací zkoušky, RNDr. Petr Rádl a kolektiv, ISBN 80-7157-625-5