

DUM č. 12 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 05.06.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Funkce - logaritmická funkce, její vlastnosti, graf, logaritmus, rovnice, soustavy rovnic, sada úloh s výsledky

Materiály jsou určeny pro bezplatné používání pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název DUMu: Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 24.1.2013

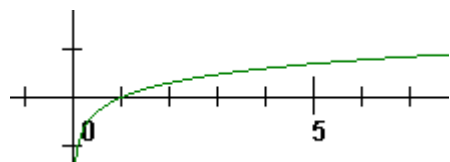
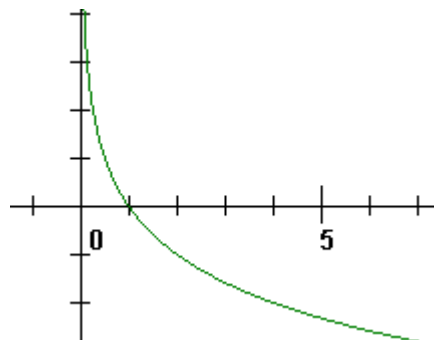
Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF

Anotace DUMu: Funkce - logaritmická funkce, její vlastnosti, graf, logaritmus, rovnice, soustavy rovnic, sada úloh s výsledky

12.FUNKCE –logaritmická funkce a rovnice, logaritmus

Def.: Nechť a je kladné číslo, různé od 1. **Logaritmickou funkcí** o základu a se nazývá funkce, která je inverzní k exponenciální funkci. Zápis ve tvaru $y = \log_a x$

Graf:

1. $a > 1$ Fce rostoucí na $(0, +\infty)$.2. $0 < a < 1$ Fce klesající na $(0, +\infty)$.

$$D_f = (0; +\infty)$$

$$H_f = \mathbb{R}$$

$$f(1) = 0$$

funkce bijektivní na \mathbb{R} **Věty o logaritmech:**

$$\log_a(r \times s) = \log_a r + \log_a s$$

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$$

$$\log_a r^s = s \log_a r$$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Dekadický logaritmus $\log_{10} x = \log x$ Přirozený logaritmus $\log_e x = \ln x$

$$a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$$

$$\log_r t = \frac{\log_s t}{\log_s r}$$

$$\text{důsledek } \log_a t = \frac{\ln t}{\ln a} = \frac{\log t}{\log a}$$

Logaritmické rovnice

=rovnice s neznámou v argumentu logaritmické funkce.

Při řešení vycházíme z vlastností log. Funkce – je bijektivní.

$$\log_a L = \log_a P \Leftrightarrow L = P$$

Zkouška nebo podmínky jsou nutnou součástí řešení.

Příklady:

1. Vypočítejte:

- a) $\log_{1/3} 9$ b) $\log_5 125$ c) $\log_7 \sqrt{7}$ d) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{16}$
e) $\log_8 \sqrt{2}$ f) $\log_5 1$ g) $\log_{0,25} 4$ h) $\log_{0,2} 0,04$

Výsledky: a)-2 b)3 c) 1/2 d)-8 e)1/6 f) 0 g)-1 h)2

2. Najděte všechna reálná $x \in (0; +\infty)$, pro něž platí:

- a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ c) $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$ d) $\log_2 x = -\frac{1}{3}$
e) $\log_5 x = 0$ f) $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$ g) $\log_{17} x = 1$ h) $\log x = -\frac{3}{5}$

Výsledky: a)81 b) 4 c) 5 d) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ e) 1 f)1/8 g)17 h) $\sqrt[5]{0,001}$

3. Najděte všechna kladná reálná čísla a tak, aby platilo:

- a) $\log_a 27 = 3$ b) $\log_a \frac{1}{16} = 4$ c) $\log_a \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ d) $\log_a 5 = -1$
e) $\log_a 4 = \frac{1}{4}$ f) $\log_a \sqrt{8} = 3$ g) $\log_a 8 = 6$ h) $\log_a \sqrt{1000} = \frac{3}{2}$

Výsledky: a) 3 b)1/2 c)1/27 d) 1/5 e)256 f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{2}$ h)10

4. Vypočítejte:

a) $\log_2 \log_2 16$

d) $3\log_2 \frac{5}{3} - 2\log_2 \frac{10}{9} + \log_2 \frac{1}{30}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 4$

e) $\log^2 2 + 2 \cdot \log 2 \cdot \log 5 + \log^2 5 - \log 1$

c) $\log_5 \frac{1}{25} - \left(\log_{\frac{1}{3}} 9 \right)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 4^2$

f) $2^{\log_2 3} + 3^{\log_3 5}$

Výsledky: a)2 b)-1 c)-10 d)-3 e)1 f)8

5. Vypočítejte x víte-li, že a, b, c jsou kladná reálná čísla (odlogaritmujte)

a) $\log x = 0,5\log a + 3\log b - 2\log c$

b) $\log x = \frac{1}{2}\log a - \log b - \frac{3}{5}\log c + 1$

c) $\log_2 x = 3\log_2 a + 2\log_2 b + 4$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4} \left(\log_{\frac{1}{2}} a + 3\log_{\frac{1}{2}} b \right) - 2 + \log_{\frac{1}{2}} c$

Výsledky: a) $x = \frac{\sqrt{a} \cdot b^3}{c^2}$ b) $x = \frac{\sqrt{a} \cdot 10}{b \cdot \sqrt[3]{c^3}}$ c) $x = a^3 b^2 \cdot 16$ $x = 4 \cdot \sqrt[4]{ab^3} \cdot c$

6. Dané výrazy zlogaritmujte:

a) $\log \frac{a^2 b^3}{100 \cdot \sqrt{c}}$

b) $\log \sqrt{\frac{10a}{bc}}$

c) $\log \frac{(a+b)^2}{c}$

Výsledky:

a) $2\log a + 3\log b - 2 - \frac{1}{2}\log c$

b) $\frac{1}{2}(\log a - \log b - \log c + 1)$

c) $2\log(a+b) - \log c$

7. Určete definiční obory funkcí:

$f_1 : y = \frac{1}{\log x - 1}$

$f_2 : y = \frac{1}{\log_2(x+7) - 1}$

$f_3 : y = \log(|x+1| - 7)$

$$f_4 : y = \sqrt{\log(x+3)}$$

$$f_5 : y = \log \frac{x}{2x-1}$$

$$f_6 : y = \sqrt{\log_{0,2} \frac{x+5}{x}}$$

$$\text{Výsledky: } D_{f_1} = (0; +\infty) - \{10\} \quad D_{f_2} = (-7; +\infty) - \{-5\} \quad D_{f_3} = (-\infty; -8) \cup (6; +\infty)$$

$$D_{f_4} = \langle -2; +\infty \rangle \quad D_{f_5} = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \quad D_{f_6} = (-\infty; -5)$$

8. Rozhodněte, zda platí $A > B$ nebo $A < B$:

a) $A = \log_3 11$

b) $A = \log_{1/2} 0,4$

c) $A = \log_3 5$

$B = \log_3 12$

$B = \log_{1/2} 0,3$

$B = \log_5 3$

Výsledky: a) $A < B$ b) $A < B$ c) $A > B$

9. Určete, zda $a > 1$ nebo $0 < a < 1$, víte-li, že platí:

a) $\log_a 2 < \log_a 5$

b) $\log_a 2,7 > \log_a 2,8$

c) $\log_a 0,4 < \log_a 1$

Výsledky: a) $a > 1$ b) $0 < a < 1$ c) $a > 1$

10. Najděte všechna reálná čísla x , pro která platí:

a) $\log_{1,5} x < \log_{1,5} 5$

b) $\log_{0,7}(x+1) \leq \log_{0,7} \frac{1}{3}$

Výsledky: a) $x \in (0; 5)$

b) $x \in \left\langle -\frac{2}{3}; +\infty \right\rangle$

11. Načrtněte grafy funkcí (část MZLU):

a) $y = \log(x-1)$

b) $y = \log_{0,5} x + 1$

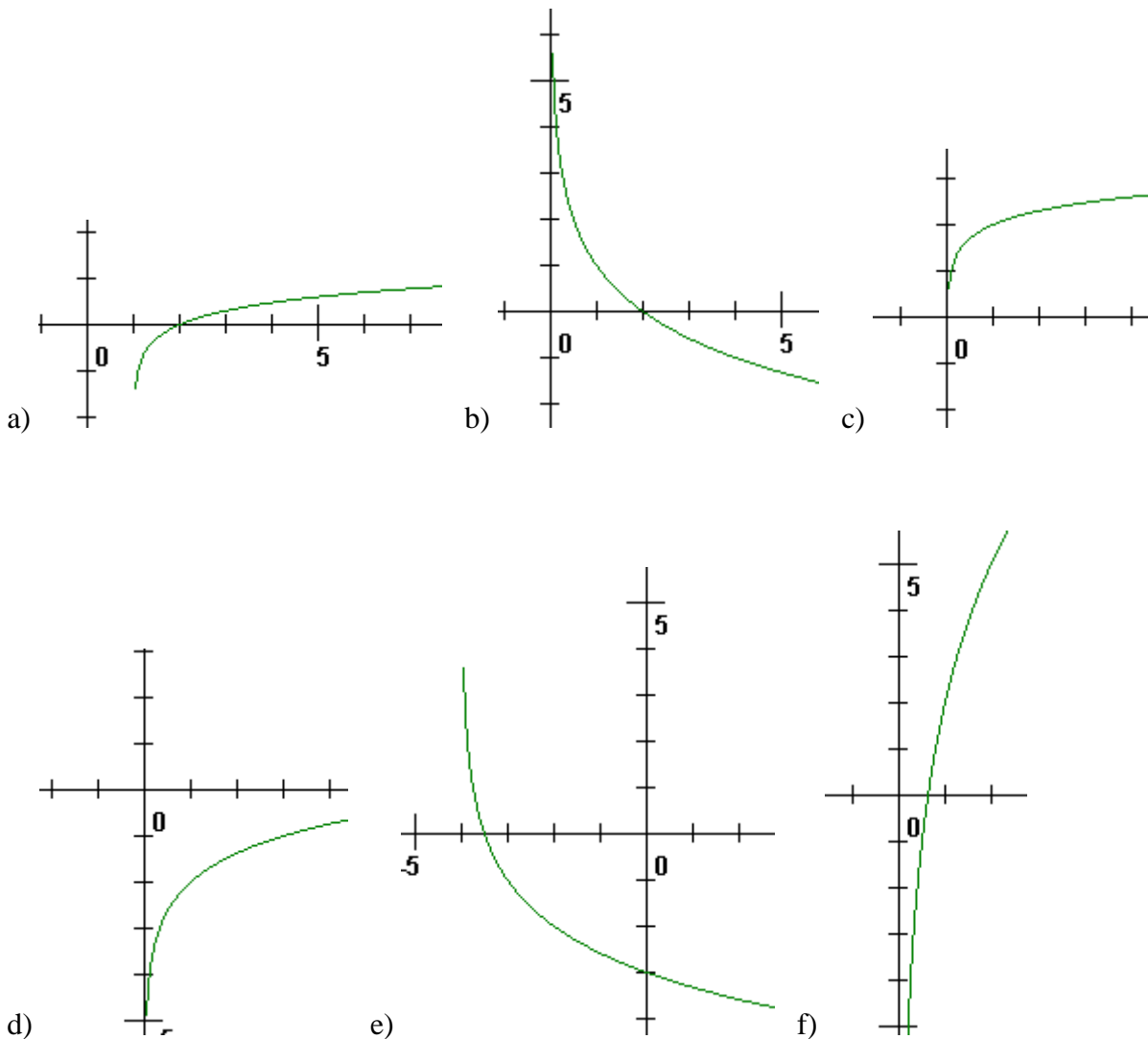
c) $y = \log x + 2$

d) $y = \log_3 x - 2$

e) $y = \log_{1/2}(x+4) - 1$

f) $y = -3\log_{1/2} x + 2$

Výsledky:



12. (VŠE) Z daných rovností určete A a udejte existenční podmínky:

$$a) \log A = \frac{1}{4} \log a - \frac{5}{6} \log b + \frac{3}{4}$$

$$b) \log_{\frac{1}{3}} A = -2 + \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{3}} b - 4 \log_{\frac{1}{3}} a + \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} b$$

$$c) \log_4 A = -1 + \frac{1}{4} \log_4 (m-4) - 4 \log_4 (4+m)$$

Výsledky: a) $\frac{\sqrt[4]{10^3 a}}{\sqrt[6]{b^5}}$ $a > 0$ $b > 0$

b) $\frac{9b}{a^4}$ $a > 0$ $b > 0$

c) $\frac{\sqrt[4]{m-4}}{4(4+m)^4}$ $m \in (4; +\infty)$

13.(MZLU) Řešte v R :

a) $\log(x+1) + \log(x-1) - \log(x-2) = \log 8$

b) $2\log\left(x + \frac{1}{2}\right) - \log(x-1) = \log\left(x + \frac{5}{2}\right) + \log 2$

c) $2\log\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log(1-x) + \log\left(\frac{3}{2} - x\right) + \log 2$

d) $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 2\log_3(x-3) + 1$

e) $\log\sqrt{3x-2} + \log\sqrt{4x-7} = \log 13$

f) $\log\sqrt{3x-5} + \log\sqrt{7x-3} = \frac{1}{2}\log 11$

g) $(1+3x)^{-\log(1+3x)} = 0,1$

h) $\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}} = 3$

i) $\sqrt{(0,001x)^{\log x}} = 0,1$

j) $x^{3+4\log x} = 10x^6$

k) $1 + \log x^3 = \frac{10}{\log x}$

l) $x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11$

m) $2 + \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(x+3) = 0$

Výsledky: a) 3;5 b) 3/2 c) 1/2 d) 7 e) 5 f) 2 g) 3;-0,3 h) 48

i) 10;1010 j) 10;10^{-1/4} k) 10^{5/3};10⁻² l) 10;1;0,1 m) 1

14. (VŠE) Řešte v R .

a) $4^{\log_9 x^2} - 1 = 4^{1+\log_9 x} - 4^{-1+\log_9 x}$

b) $\log_6\left(\log_5\left(\log_4 x + \frac{4}{\log_4 x}\right)\right) = 0$

$$c) \left(2(\log x)^3 - \frac{3}{2} \log x \right) \log x = \log \sqrt{10}$$

$$d) \log(2x-3) + \log 3x = \log(8x-12)$$

$$e) 100^{\log(x+20)} = 10000$$

$$f) \log_x(x^2 - 2x + 2) = 1$$

$$g) x^{3+4 \log x} - 10x^6 = 0$$

$$h) \log_2(9 - 2^x) = 3 - x$$

$$i) \log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$$

$$j) \log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3)$$

$$k) \log(1-x) - \log a = \log 2 + \log(1+x) - \log(1+a^2)$$

$$l) (2x+1)^{\log(2x+1)-3} = \frac{1}{100}$$

Výsledky:

$$a) 9 \quad b) 4; 4^4 \quad c) 10; 1/10 \quad d) \text{n.ř.} \quad e) 80 \quad f) 2 \quad g) 10; 10^{\frac{1}{4}} \quad h) 0; 3$$

$$i) -2 \quad j) 2 \quad k) \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2 \quad a > 0 \quad l) \frac{9}{2}; \frac{99}{2}$$

15. (VŠE) V množině celých čísel řešte rovnice:

$$a) \log x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{4} \log x + \frac{1}{8} \log x + \dots = 2$$

$$b) \log_2(9^{x-2} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-2} + 1)$$

$$c) \log 2 + \log(4^{-x-1} + 9) = 1 + \log(2^{-x-1} + 1)$$

Výsledky: a) 10 b) 2; 3 c) -3; -1

16. V množině $R \times R$ řešte soustavu rovnic:

$$a) \begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81 \\ \log_3 \sqrt{xy} = 1 + \log_3 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y) = 2 \\ \log_3(x-y) = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \log x - \log y = \log 15 - 1 \\ 10^{\log(3x+2y)} = 39 \end{cases}$$

Výsledky: a) [9;4] b) $\left[\frac{41}{9}; -\frac{40}{9}\right]$ c) [9;6]

Literatura:

1) Sbíрка příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9

2) Matematika – příklady pro přijímací zkoušky, RNDr. Petr Rádl a kolektiv, ISBN 80-7157-625-5