DUM č. 3 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 05.06.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Funkce – obecné vlastnosti: definice základních pojmů a vlastností funkce, příklady k procvičení s výsledky

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název DUMu: **Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravdepodobnost**
Autor: Jarmila Šimečková
Datum: 23.10.2012
Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF
Anotace DUMu:Funkce – obecné vlastnosti: definice základních pojmů a vlastností funkce, příklady k procvičení s výsledky

3. Funkce - obecné vlastnosti

DEF.: Funkcí na množině D_f se nazývá předpis, kterým je každému prvku množiny D_f přiřazeno právě jedno reálné číslo. Množina D_f se nazývá **definiční obor funkce**.

DEF.: Oborem hodnot funkce *f* se nazývá množina všech $y \in R$, ke kterým existuje aspoň jedno $x \in D_f$ tak, že $y = f(x)$. Tuto množinu označujeme H_f.

DEF.: Funkce se nazývá **sudá (lichá) funkce**, právě když platí:

1. Pro každé $x \in D_f$ také $-x \in D_f$ (tedy definiční obor je symetrický podle počátku).
2. Pro každé $x \in D_f$ se $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$.

Graf sudé funkce je symetrický podle osy y.
Graf liché funkce je symetrický podle počátku soustavy souřadnic.

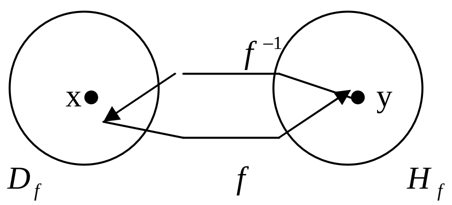
DEF.: Funkce *f* se nazývá **funkce omezená na množině** ***M*** $(M \subset D_f)$ právě když je zdola omezená na *M* a zároveň shora omezená na *M*.

- **zdola omezená**: existuje číslo d; $f(x) \geq d$ pro každé $x \in D_f$
- s**hora omezená**: existuje číslo d; $f(x) \leq d$ pro každé $x \in D_f$

DEF.: Funkce f se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí:
je-li $x_1 \neq x_2$ pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

DEF.: Je-li *f* funkce prostá, pak k ní existuje právě jedna funkce, označíme jí f^{-1}, která je dána takto: 1. Její definiční obor je H_f, tedy $D_{f^{-1}} = H_f$.
2. Každému $y \in D_{f^{-1}}$ je přiřazeno právě to $x \in D_f$, pro které je $f(x) = y$.

Funkce f^{-1},se nazývá **funkce inverzní** k funkci f.



Graf funkce *f* je s grafem funkce f^{-1} symetrický podle přímky $y = x$.

DEF.: Funkce *f* se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že:
Pro každé $x \in D_f$ také $(x + p) \in D_f$ a platí $f(x \pm p) = f(x)$
Číslo *p* se nazývá **perioda funkce.**

DEF.: Nechť f je funkce, M podmnožina jejího definičního oboru D_f. Funkce f se nazývá

<u>funkce rostoucí na množině *M* (funkce neklesající na množině *M*),</u>

Právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$

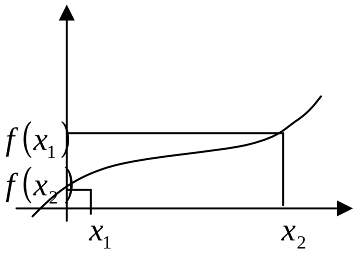
(Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$)

DEF.: Nechť f je funkce, M podmnožina jejího definičního oboru D_f. Funkce f se nazývá

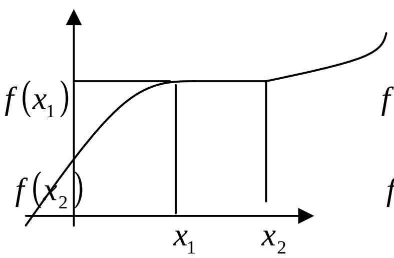
<u>funkce klesající na množině *M* (funkce nerostoucí na množině *M*),</u>

Právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$

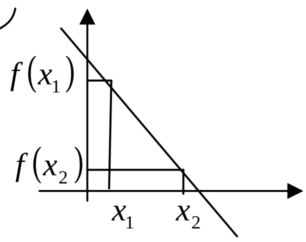
(Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$)



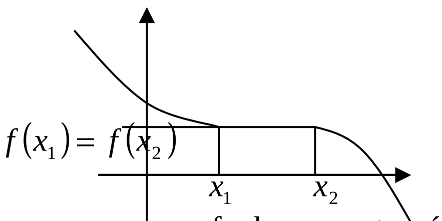
funkce rostoucí



funkce neklesající



funkce klesající



funkce nerostoucí

Funkce, které na množině M jsou pouze rostoucí nebo klesající, se nazývají **ryze monotónní funkce** na M.
Funkce, které jsou buď neklesající nebo nerostoucí na množině M, nazýváme **monotónní** funkce na M.
Pokud pro všechny prvky $x_1, x_2 \in M$ platí $f(x_1) = f(x_2)$ je funkce na množině M **konstantn**<u>í</u>.

DEF.: Nechť f je funkce, M podmnožina jejího def. oboru D_f, $a \in M$.

Funkce f má na množině M:

- **v bodě *a* minimum**, právě když pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq f(a)$
- **v bodě *a* maximum**, právě když pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq f(a)$.

Příklady:

.

1) Určete definiční obor funkce (VŠE): *Výsledky*:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2}{x^2-5x+6}}$ — a) $(2;3)$

b) $f(x)=\sqrt{6+7x-3x^2}$ — b) $\left\langle -\dfrac{2}{3};3\right\rangle$

c) $f(x)=\log\left(5x^2-8x-4\right)$ — c) $\left(-\infty;-\dfrac{2}{5}\right)\cup(2;+\infty)$

d) $f(x)=\log\left(4x-x^2\right)-\log(x-2)$ — d) $(2;4)$

e) $f(x)=\sqrt{6x-x^2}+\sqrt{x-1}$ — e) $\langle 1;6\rangle$

f) $f(x)=\log\left(x^2-10\right)+\sqrt{x^2-5x}$ — f) $\left(-\infty;-\sqrt{10}\right)\cup(5;+\infty)$

g) $f(x)=\sqrt{2\cos x-1}$ — g) $\left\langle -\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right\rangle+2k\pi \quad k\in Z$

h) $f(x)=\log(\sin x)$ — h) $(0;\pi)+2k\pi \quad k\in Z$

i) $f(x)=\log\left(\sqrt{3}-\tan x\right)$ — i) $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{3}\right)+k\pi \quad k\in Z$

j) $f(x)=\sqrt{\log(\log x)}$ — j) $\langle 10;+\infty)$

k) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{|x-1|}}$ — k) $\langle 1;+\infty)$

l) $f(x)=\sqrt{\log(\cos x)}$ v $\langle 0;2\pi)$ — l) $\{0\}$

m) $f(x)=\sqrt{|x|-1}$ — m) $(-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;+\infty$

2) Rozhodněte, zda je funkce sudá, lichá nebo ani sudá ani lichá: *Výsledky:*

a) $f(x)=\dfrac{x+x^3}{x^4+3x^2}$ — a) lichá

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+3}$ — b) sudá

c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1}$ — c) ani sudá ani lichá

d) $f(x)=3\cos x-2$ — d) sudá

e) $f(x)=2^x$ — e) ani sudá ani lichá

f) $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|+3}$ — f) sudá

g) $f(x)=\dfrac{\sin x}{2x^2-3}$ — g) lichá

3) Udejte příklad funkce, která je:

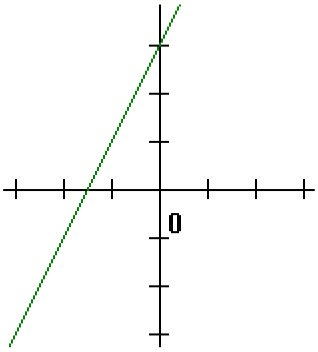
a) rostoucí, neomezená na *R*, prostá

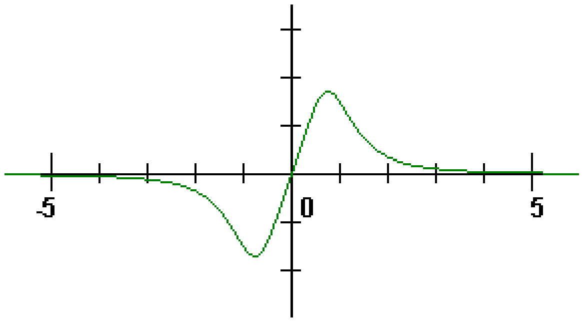
b) omezená, $D_f=R$, má jedno maximum a jedno minimum na *R*

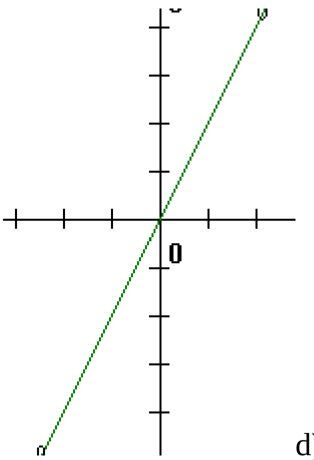
c) lichá, $D_f=(-2{,}5;2{,}5)$, omezená na D_f

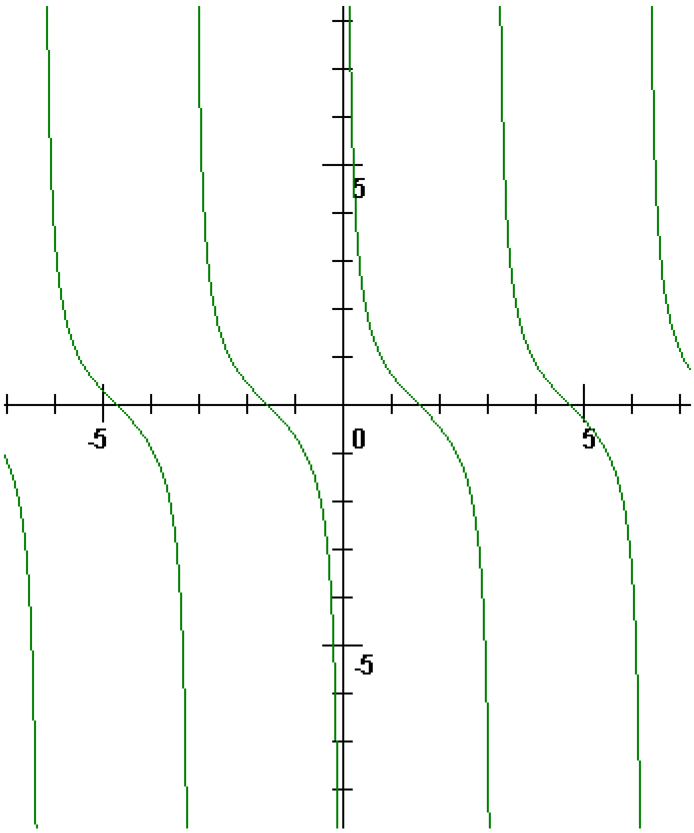
d) periodická, neomezená na *R*, lichá

Výsledky:

a) 

b) 

c) 

d) 

4) Rozhodněte, které ze zadaných funkcí jsou prosté. K těm pak vytvořte inverzní funkci, určete $D_f, H_f, D_{f^{-1}}, H_{f^{-1}}$.

1. $f(x) = 3x - 1$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
5. $f(x) = |x|$

6. $f(x) = (x+1)^2 - 3$

7. $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x-3}$

8. $f(x) = |x+1|$

9. $f(x) = x^3$

10. $f(x) = e^x$

Výsledky: 1. prostá, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$, $D_f = H_f = R = D_{f^{-1}} = H_{f^{-1}}$

2. není prostá

3. prostá, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_f = H_f = R - \{0\} = D_{f^{-1}} = H_{f^{-1}}$

4. není prostá

5. není prostá

6. není prostá

7. prostá, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-4} + 3$, $D_f = H_{f^{-1}} = R - \{3\}$, $H_f = D_{f^{-1}} = R - \{4\}$

8. není prostá

9. prostá, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $D_f = H_f = R = D_{f^{-1}} = H_{f^{-1}}$

10. prostá, $f^{-1}(x) = \ln x$, $D_f = R = H_{f^{-1}}$, $H_f = (0;+\infty) = D_{f^{-1}}$

5) Dokažte, že funkce $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ je periodická s periodou π.

Řešení: $f(x+\pi) = \sin\left[2(x+\pi) - \dfrac{\pi}{2}\right] = \sin\left(2x + 2\pi - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = f(x)$

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9