DUM č. 5 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 05.06.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Funkce – kvadratická funkce a rovnice : definice kvadratické funkce, její graf, řešení kvadratické rovnice, příklady na procvičení s výsledky

Materiály jsou určeny pro bezplatné používání pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.

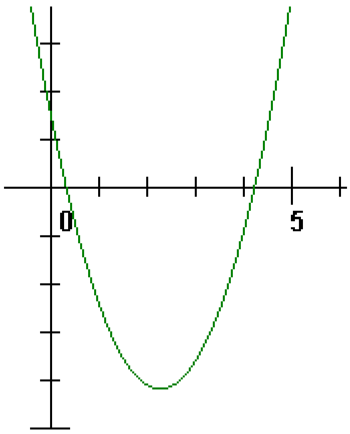
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<u>Název DUMu</u>: **Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravdepodobnost**
<u>Autor</u>: Jarmila Šimečková
<u>Datum</u>: 22.11.2012
<u>Ročník</u>: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF
<u>Anotace DUMu</u>: Funkce – kvadratická funkce a rovnice : definice kvadratické funkce, její graf, řešení kvadratické rovnice, příklady na procvičení s výsledky

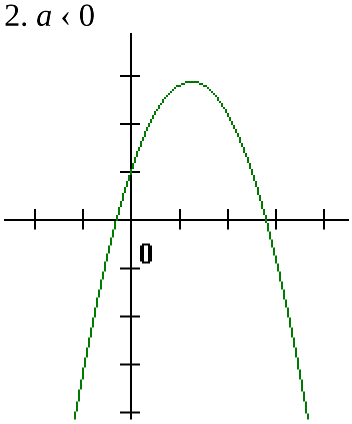
5. Funkce – kvadratická funkce a rovnice

Def:**Kvadratickou funkcí** se nazývá každá funkce na množině R daná rovnicí $f(x) = ax^2 + bx + c$,
Kde a je reálné číslo různé od nuly, b a c jsou libovolná reálná čísla.
Grafem kvadratické funkce je **parabola**. $D_f = R$

1. $a > 0$



2. $a < 0$



vrchol paraboly má souřadnice $\left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$, parabola protíná osu y v bodě $[0; c]$

Def : **Kvadratickou rovnicí** s reálnými koeficienty s neznámou x nazýváme každou rovnici tvaru $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde a je reálné číslo různé od nuly, b a c jsou libovolná reálná čísla.

ax^2 … **kvadratický člen**
bx … ..**lineární člen**
c … ....**absolutní člen**

<u>Speciální případy</u> kvadratické rovnice :
Je-li $b = 0$, má kvadratická rovnice tvar $ax^2 + c = 0$ a nazývá se **ryze kvadratická rovnice.**
Je-li $c = 0$, má kvadratická rovnice tvar $ax^2 + bx = 0$ a nazývá **se kvadratická rovnice bez absolutního členu.**

<u>Řešení v *R*</u> :
Diskriminant $D = b^2 - 4ac$
Je-li $D < 0$ nemá rovnice v R řešení.

Je-li $D = 0$ má rovnice 1 dvojnásobný kořen

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a}$$

Je-li $D > 0$ má rovnice právě dva různé kořeny

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Rozklad na součin:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

<u>Příklady :</u>

1) Nakreslete graf funkce *f*, určete D_f a H_f a průsečíky grafu s osami souřednic(MZLU):

a) $f(x) = (x-1)^2$

b) $f(x) = 3 - x^2$

c) $f(x) = -x^2 + 1$

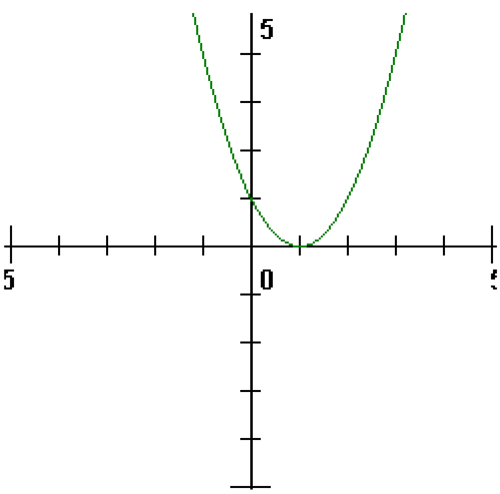
d) $f(x) = (2+x)^2$

e) (VŠE) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$

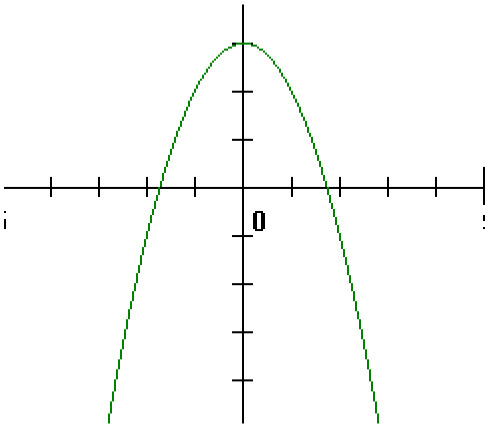
f) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

<u>Výsledky:</u>

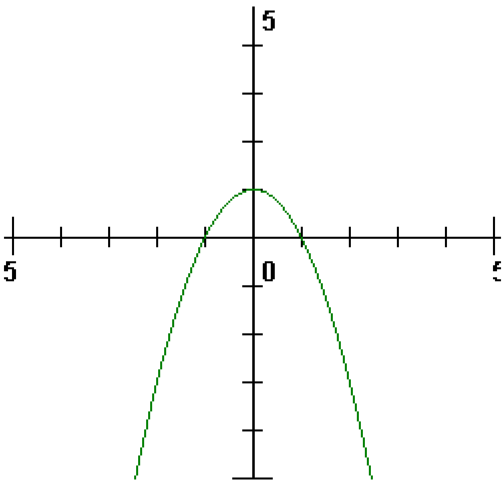
a) vrchol $[1;0]$ $D_f = R$ $H_f = \langle 0;+\infty)$ průsečíky: $[1;0]$ $[0;1]$



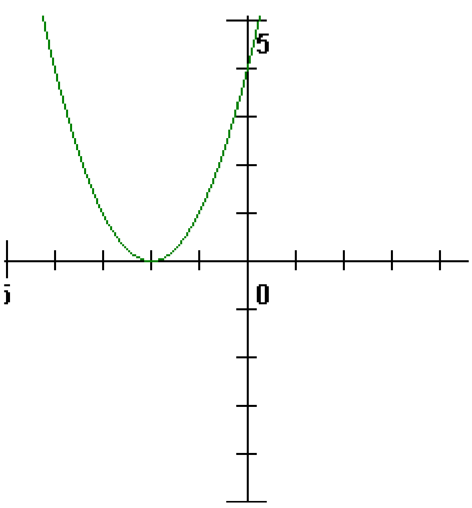
b) vrchol $[0;3]$ $D_f = R$ $H_f = (-\infty;3\rangle$ průsečíky : $[0;3]\left[-\sqrt{3};0\right]\left[\sqrt{3};0\right]$



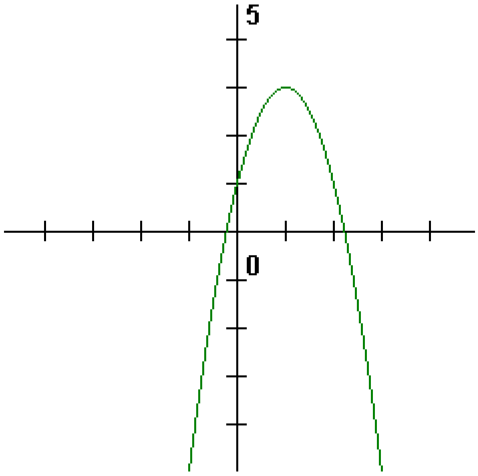
c) vrchol $[0;1]$ $D_f = R$ $H_f = (-\infty;1$ průsečíky : $[0;1][-1;0][1;0]$



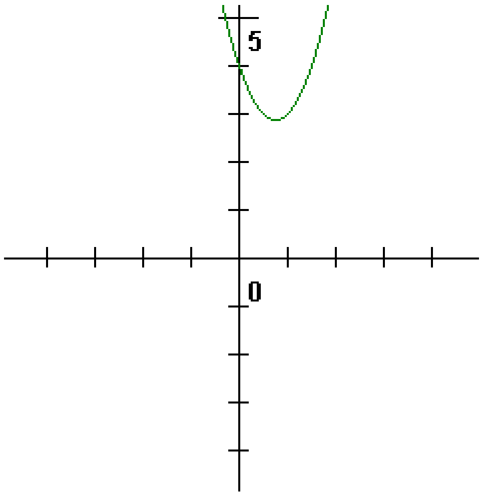
d) vrchol $[-2;0]$ $D_f = R$ $H_f = \langle 0;+\infty)$ průsečíky: $[-2;0][0;4]$



e) vrchol $[1;3]$ $D_f = R$ $H_f = (-\infty;3\rangle$ průsečíky : $[0;1]\left[\frac{2-\sqrt{6}}{2};0\right]\left[\frac{2+\sqrt{6}}{2};0\right]$



f) vrchol $\left[\frac{3}{4};\frac{23}{8}\right]$ $D_f = R$ $H_f = \left\langle\frac{23}{8};+\infty\right)$ průsečíky: $[0;4]$



2) Je dána kvadratická funkce $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Zjistěte, pro které hodnoty $x \in R$ platí $f(x) = f(6)$.

Výsledek :
$x = 6 \vee x = -3$

3) (VŠE) Napište kvadratickou funkci, jejíž graf prochází danými body: A [1;0], B [2;3], C [3;10].

Výsledek:
$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

4) (VŠE) Určete koeficienty a, b, c funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ tak, aby platilo:

a) $f(1) = 0 \quad f(-1) = 10 \quad f(0) = 2$

b) $f(0) = 3 \quad f(2) = 5 \quad f(-1) = -4$

Výsledek:

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

b) $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$

5) Sestavte všechny kvadratické rovnice, jejíž kořeny jsou -5 a 2.

Výsledek:

$a(x^2 + 3x - 10) = 0 \quad a \in R \quad a \neq 0$

6) Pro které hodnoty q má rovnice $x^2 - 2x + q = 0$

a) dvě různá reálná řešení

b) jediné reálné řešení

c) nemá řešení v R?

Výsledky:

a) $q < 1$

b) $q = 1$

c) $q > 1$

7) Rozložte kvadratické trojčleny na součin, zapište, kdy má výraz smysl a zjednodušte.

$$\frac{\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} - \dfrac{x^2-x-12}{x^2+x-6}}{\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+3x-10} - \dfrac{x^2+10x+24}{x^2+4x-12}}$$

Výsledek:

-1 $\quad x \neq -6, -5, -3, -1, 2$

8) Ověřte zda uvedené x je kořenem dané rovnice.

a) $x = 2 - \sqrt{3} \qquad \sqrt{3}(x^2 - 5x - 1) = 4x$

b) $x = 1 + 2\sqrt{3} \qquad x^2 - 5x + 2\sqrt{3} = 2(5 - x)$

Výsledky :

a) ne $\qquad$ b) ano

9) Řešte rovnici v *R*.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $(3x^2 + x - 2)^2 - 30x^2 - 10x = -36$

c) $5(x-1)^2 + 3(x^2 + 20) = 7(2x+7) - x^2$

Výsledky :

a) {1, -1, 2, -2} b) {-2, -4/3, 1, 5/3} c) {4/3}

10) Funkční předpis kvadratické funkce f zapište rovnicí, víte-li, že platí: funkce f je sudá v *R*, hodnota minima je –8 a jeden z průsečíků grafu funkce s osou *x* má souřadnice [2, 0]

Výsledek:

$f(x) = 2x^2 - 8$

11) Určete reálná čísla a, b tak, aby pro funkci $y = ax^2 + bx + 5$ platilo pro všechna $x \in R$

$f(x+1) - f(x) = 8x + 3$

Výsledek:

$y = 4x^2 - x + 5$

Literatura:

1) Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9

2) Matematika – příklady pro přijímací zkoušky, RNDr.Petr Rádl a kolektiv, ISBN 80-7157-625-5