DUM č. 15 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 23.01.2014

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Postup řešení kvadratických rovnic s parametrem, sada úloh s výsledky na procvičení.

Název DUMu: **Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravdepodobnost**
Autor: Jarmila Šimečková
Datum: 22.11.2013
Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF
Anotace DUMu: Rovnice s parametrem - řešení kvadraticých rovnic s parametrem, soubor příkladů s výsledky na procvičení.

15. Rovnice s parametrem- lineární rovnice a soustavy lineárních rovnic s parametrem

Kromě neznámých mohou rovnice (soustavy r.) obsahovat další proměnné, jimž se říká parametry. Značí se a, b, p apod.

Rovnice (soustavy r.) s parametry představuje zápis množiny všech rovnic (soustav r.), které získáme dosazením konstant za každý z parametrů dané číselné množiny (oboru parametru).
Příkladem je rovnice $ax = b$ s neznámou $x \in R$ a s parametry $a, b \in R$.

Řešit rovnici (soustavu r.) s parametry znamená určit její kořeny v závislosti na přípustných hodnotách parametrů.

Postup při hledání úplné diskuze řešení dané rovnice vzhledem k paramteru:

Kvadratické rovnice

a) Určit podmínky pro parametr a proměnnou
b) Upravit na základní tvar $ax^2 + bx + c = 0$
c) Určit ty hodnoty parametru, pro které je rovnice skutečně kvadratická ($a \neq 0$) a pak z výrazu pro diskriminant určíme hodnoty parametru, pro něž má daná rovnice:
   - v R kořeny 2, kořen 1 nebo žádný kořen (D>0, D=0, D<0)
   - v K kořeny 2 reálné, 1 kořen nebo 2 komplexní (komplexně sdružené) (D>0, D=0, D<0)

Příklady:

1)(VŠE)
Proveďte diskuzi počtu řešení kvadratické rovnice v závislosti na parametru m∈ R

$a)\ x^2 + 2x + m^2 = 0$

$b)\ 2x^2 + 3mx + 2 = 0$

$c)\ x^2 - (1 - m)x + 1 = 0$

$d)\ x^2 - (m - 6)x + 18 - 3m = 0$

$e)\ (m^2 - 1)x^2 + 2mx + 1 = 0$

$f)\ m^2x^2 + 2m^2x + 1 + m^2 = 0$

Výsledky:

a) $m \in (-1,1)$, 2 různé reálné kořeny

m = -1 nebo m = 1 , 1 dvojnásobný kořen

$m \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, 2 imaginární kořeny

b) $m \in (-\infty,-\frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3},+\infty)$, 2 reálné kořeny

$m = -\frac{4}{3} \cup m = \frac{4}{3}$, 1 kořen dvojnásobný

$m \in (-\frac{4}{3},\frac{4}{3})$, 2 kořeny imaginární,komplexně sdružené

c) $m \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$, 2 různé reálné kořeny

$m = -1$ nebo $m = 3$, 1 kořen dvojnásobný

$m \in (-1,3)$, 2 kořeny imaginární,komplexně sdružené

d) $m \in (-\infty,-6) \cup (6,+\infty)$, 2 různé reálné kořeny

$m = -6$ nebo $m = 6$, 1 kořen dvojnásobný

$m \in (-6,6)$, 2 kořeny imaginární,komplexně sdružené

e) $m \neq -1$ a $m \neq 1$, 2 různé reálné kořeny

m = -1 nebo m = 1 , je rovnice lineární

f) pro m = 0 nemá řešení

$m \neq 0$, 2 kořeny imaginární,komplexně sdružené

2)(VŠE)

Proveďte úplnou diskuzi řešení kvadratické rovnice s neznámou x a parametrem t

$(t+5)x^2 + 2(t+2)x + t = 0$, $t \in R$

Výsledky:

$t \in (-\infty,-5) \cup (-5,4)$, 2 reálné různé kořeny

t = 4 , 1 dvojnásobný kořen

t = -5 , rovnice lineární

$t \in (4,\infty)$, 2 imaginární komplexně sdružené kořeny

3)(VŠE)

Pro které hodnoty parametru má rovnice s neznámou x jediný kořen:

a) $9x^2 - 6ax + 9a = 0$ b) $x^2 - 2(m+4)x + m^2 + 6m = 0$

c) $(a-1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$

Výsledky:

$t \in (-\infty,-5) \cup (-5,4)$

a) $\{0,9\}$

b) $\{-8\}$

c) $\left\{\frac{1}{5},1\right\}$

4)(VŠE)
Pro které hodnoty parametru má rovnice jeden kořen roven nule.Určete druhý kořen:
a) $x^2-3x-m^2+3m-2=0$
b) $x^2+4x-3m^2+7m-2=0$
c) $2ax^2-7(a+1)x+a-1=0$

Výsledky:
$t\in(-\infty,-5)\cup(-5,4)$
a) $m\in\{1,2\}$,x_2 = 3
b) $m\in\left\{2,\frac{1}{3}\right\}$,$x_2$ = -4
c) a = 1,x_2 = 7

5) (VŠE)
V závislosti na parametru a vypočtěte,kdy má daná kvadratická rovnice jeden kořen roven nule.Pro které hodnoty parametru b je druhý kořen x_2:
a) $3x^2+3bx-3x+a^2+a-12=0 \quad x_2=-5$
b) $x^2+2bx-x+a^2-a-6=0 \quad x_2=3$
c) $4x^2-2bx+3x+a^2-3a-40=0 \quad x_2=-5$
d) $2x^2-4bx-6x-a^2-2a+15=0 \quad x_2=-3$

Výsledky:
$t\in(-\infty,-5)\cup(-5,4)$
a) a = 3 nebo a = -4 , b = 6
b) a = 3 nebo a = -2 , b = -1
c) a = 8 nebo a = -5 , b = $-\frac{17}{2}$
d) a = 3 nebo a = -5 , b = -3

6) Najděte všechny reálné hodnoty koeficientu a , pro které má rovnice
$x^2+x\cdot 2a\sqrt{a^2-3}+4=0$ dvojnásobný kořen

Výsledek: a = 2 nebo a = -2

7) Pro které hodnoty parametru m bude mít rovnice $4x^2-8mx-6m+9=0$ jeden kořen třikrát větší než ten druhý?
Výsledek: pro m = 1 , $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$; pro m = -3 , $\left[-\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right]$

8) V rovnici $x^2-\frac{15}{4}x+a^3=0$ určete všechny reálné hodnoty koeficientu a tak,aby jeden reálný kořen rovnice byl druhou mocninou druhého kořene této rovnice.

Výsledek:

$a = \frac{3}{2}$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{9}{4}$

$a = -\frac{5}{2}$, $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{25}{4}$

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9