DUM č. 16 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 23.01.2014

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Všechny typy nerovnic i jejich soustavy, sada úloh s výsledky na procvičení.

Název DUMu: **Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravdepodobnost**
Autor: Jarmila Šimečková
Datum: 17.10. 2013
Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF
Anotace DUMu: řešení algebraických a nealgebraických rovnic v E2, soubor příkladů s výsledky na procvičení.

16. NEROVNICE – ALGEBRAICKÉ A NEALGEBRAICKÉ, SOUSTAVY NEROVNIC, ŘEŠENÍ NEROVNIC V E2

a) **Algebraické nerovnice** n-tého stupně s neznámou $x \in R$ je každá nerovnice tvaru

$$P_n(x) > 0 \quad \text{resp.} \quad P_n(x) < 0$$
$$P_n(x) \geq 0 \quad \text{resp.} \quad P_n(x) \leq 0$$

Kde $P_n(x)$ je mnohočlen *n*-tého stupně. Významnými speciálními případy jsou zejména lineární nerovnice a kvadratické nerovnice

b) **Nealgebraická nerovnice** je každá nerovnice, která není algebraická. Patří mezi ně nerovnice racionální, exponenciální, logaritmické a goniometrické.

Nerovnice (oproti rovnicím) :

- násobení záporným číslem nebo výrazem obrací znaménko nerovnice
- umocňovat nerovnici můžeme jen tehdy, když jsou obě strany
- nerovnice nezáporné

Řešení nerovnic v E_2

Rovnicí $ax + by + c = 0$ je určena přímka v rovině E_2. Pro body, neležící na této přímce, platí $ax + by + c < 0$ nebo $ax + by + c > 0$. Tyto body vyplňují vnitřky polorovin. Analogicky rovnice $F(x,y) = 0$ určuje rovinnou křivku. Tato křivka rozděluje rovinu na dvě části takové, že pro body ležící v těchto částech, platí $F(x,y) < 0$ resp. $F(x,y) > 0$

Postupujeme takto :

(1) V rovině sestrojíme všechny křivky (resp.přímky) popsané rovnicemi $F(x,y) = 0$
(2) Určíme část roviny, jejíž body vyhovují daní nerovnici (dosazením souřadnic lib.bodů)
(3) Určím průniky všech těchto množin
(4) Znázorníme graficky. Pokud body ležící na křivce popsané rovnicí $F(x,y) = 0$ vyhovují dané soustavě nerovnic, použijeme plnou čáru, v opačném případě čárkovanou.

Příklady

1. V oboru R řešte nerovnice (MZLU) :

$a)\ \frac{2x+5}{x-1} \le 1$ $\quad e)\ \frac{2x}{x-2} \ge 3$

$b)\ \frac{10}{x+3} > 1$ $\quad f)\ \frac{9-x}{2-x} \le 2$

$c)\ \frac{x-2}{x+3} \ge 2$ $\quad g)\ \frac{2x-3}{x+2} \ge 1$

$d)\ \frac{6}{x+3} \le 1$ $\quad h)\ \frac{x-5}{x-2} < 2$

$Výsledky:\quad a)\ \langle -6;1)\quad b)\ (-3;7)$

$c)\ \langle -8;-3)\quad d)\ (-\infty;-3)\cup\langle 3;+\infty)$

$e)\ (2;6\rangle\quad f)\ (-\infty;-5\rangle\cup(2;+\infty)$

$g)\ (-\infty;-2)\cup\langle 5;+\infty)\quad h)\ (-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$

2. V oboru R řešte nerovnice (MZLU) :

$a)\ -5x^2+3x+2<0$ $\quad f)\ 2x^2+x-6\ge 0$

$b)\ -x^2+3x-2\ge 0$ $\quad g)\ 4x^2-12x+9\le 0$

$c)\ x^2-3x-1\ge 0$ $\quad h)\ 2x^2-3x+3\ge 0$

$d)\ -9x^2+12x-4<0$ $\quad i)\ -3x^2+2x+5>0$

$e)\ -4x^2+2x-3>0$ $\quad j)\ x^2+3x+2>0$

$Výsledky:\quad a)\ \left(-\infty;-\frac{2}{5}\right)\cup(1;+\infty)\quad b)\ \langle 1;2\rangle\quad c)\ (-\infty;-1\rangle\cup\langle 4;+\infty)\quad d)\ R-\left\{\frac{2}{3}\right\}$

$e)\ nemá\ řešení\quad f)\ \left(-\infty;2\right\rangle\cup\left\langle\frac{3}{2};+\infty\right)\quad g)\ \left\{\frac{3}{2}\right\}\quad h)\ R\quad i)\ \left(-1;\frac{5}{3}\right)\quad j)\ (-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$

3. Určete v oboru R definiční obory funkcí (MZLU) :

$a)\ y=\sqrt{x(x-4)}$

$b)\ y=\sqrt{1-x^2}$

$c)\ y=\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

$d)\ y=\log(x^2-1)$

$e)\ y=\log\frac{x-1}{x+2}$

$f)\ y=y=\sqrt{\frac{x}{x+2}}$

$g)\ y=\sqrt{(x-1)\cdot(x+4)}$

$h)\ y=\log[(x-2)\cdot(x-4)]$

$i)\ y=\log\frac{x+1}{6-x}$

$j)\ y=\log\frac{x-2}{x+4}$

$k)\ y=\log[(1+x)\cdot(1-x)]$

$l)\ \log(4-x^2)$

$Výsledky:\quad a)\ D_f=(-\infty;0\rangle\cup\langle 4;+\infty)\quad b)\ D_f=\langle -1;1\rangle\quad c)\ D_f=(-\infty;-3)\cup\langle 2;+\infty)$

$d)\ D_f=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\quad e)\ D_f=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)\quad f)\ D_f=(-\infty;-2)\cup\langle 0;+\infty)$

$g)\ D_f=(-\infty;-4\rangle\cup\langle 1;+\infty)\quad h)\ D_f=(-\infty;2)\cup(4;+\infty)\quad i)\ D_f=(-1;6)\quad j)\ D_f=(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$

$k)\ D_f=(-1;1)\quad l)\ (-2;2)$

4. Řešte v oboru R soustavy nerovnic (MZLU) :

$$a)\begin{cases}2\cdot(2x-3)<5x-\dfrac{3}{4}\\ 7x-5>\dfrac{15x-8}{2}\end{cases}\qquad d)\begin{cases}2\cdot(3x-1)\le 3\cdot(4x+1)+16\\ \dfrac{2+x}{2}<\dfrac{3}{8}x+1\end{cases}$$

$$b)\begin{cases}3-x\le\dfrac{1}{2}+2x\\ 2+x>7x+\dfrac{3}{2}\end{cases}\qquad e)\begin{cases}\dfrac{7-x}{2}<\dfrac{3+4x}{5}-1\\ \dfrac{5}{3}x+5\cdot(4-x)<2\cdot(4-x)\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}2-(x+2)\cdot(x-3)\ge 4x-x\cdot(x-5)\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{2x-1}{3}<2+\dfrac{x}{6}\end{cases}\qquad f)\begin{cases}2x-\dfrac{1}{3}x<x-\dfrac{x-1}{6}\\ \dfrac{3x}{4}-\dfrac{2x-2}{3}\ge\dfrac{x+1}{2}+1\end{cases}$$

$$\textit{Výsledky}:\quad a)\left(-\frac{21}{4};-2\right)\quad b)\ \textit{nemá řešení}\quad c)\left(-5;1\right\rangle\quad d)\left\langle-\frac{7}{2};0\right)\quad e)\ (9;+\infty)\quad f)\ \left(-\infty;-2\right\rangle$$

5. V množině reálných čísel řešte nerovnice (VŠE) :

$a)\ -(3-2x)^2<7x-15$

$b)\ \dfrac{(x+3)(x-4)}{x^2+2}<0$

$c)\ \dfrac{x^3-8x^2+15x}{-x^2+2x-2}\le 0$

$d)\ \sqrt{-2+x}<x$

$$\textit{Výsledky}:\quad a)\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right)\cup(2;+\infty)\quad b)\ (-3;4)\quad c)\ \langle 0;3\rangle\cup\langle 5;+\infty)\quad d)\ \langle 2;+\infty)$$

6. V množině přirozených čísel řešte nerovnice (VŠE) :

a) $\dfrac{5x+1}{x-1}-2x-2>0$

b) $\log_{\sqrt{2}}(x-1)<4\ \wedge\ \dfrac{2x}{3-x}+\dfrac{x-5}{x}<\dfrac{2x}{3-x}$

$\textit{Výsledky}:\quad a)\ \{2\}\quad b)\ \{2\}$

7. V množině celých čísel řešte nerovnice (VŠE):

a) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}<0$

b) $0 < \dfrac{5-x}{x-3} < 1$

c) $1 - \dfrac{1-x^2}{x} \geq \dfrac{2+3x}{x}$

Výsledky: *a*) $\{-3;-2;0;1;2;3;4;5\}$ *b*) *nemá řešení*
c) $\{-1;3;4;5;.....\}$

8. Řešte danou soustavu nerovnic v Z (VŠE) :

$$\begin{cases} 2x+1 < x+2 < -x+3 \\ 3x-1 > 2x-1 > x-5 \end{cases}$$

Výsledek: $\{0\}$

9. V množině reálných čísel řešte nerovnice(VŠE):

$a)\ 1 \leq \dfrac{2\log x + 3}{2} \leq \dfrac{5}{2}$

$b)\ -1 \leq \dfrac{\log x + 1}{3} \leq 2$

$c)\ \log_{0,5}\left(x^2 - x - 12\right) > \log_{0,5}(x+3)$

$d)\ \sqrt{\log_2 \dfrac{3x-2}{1-x}} < 1$

$e)\ \left(4x^2 - 16x + 7\right)\log_2(x-3) > 0$

$f)\ \log_2 \dfrac{3x+1}{x+1} \leq -1$

$g)\ 2^x - 5 \cdot 4^{x-2} > 1 - 2^{x-1}$

Výsledky: $a)\ \left\langle \dfrac{\sqrt{10}}{10};10 \right\rangle$ $b)\ \left\langle 10^{-4};10^5 \right\rangle$

$c)\ (4;5)$ $d)\left\langle \dfrac{3}{4};\dfrac{4}{5}\right)$ $e)\ \left(3;\dfrac{7}{2}\right) \cup (4;+\infty)$

$f)\ \left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{5}\right\rangle$ $g)\ (2-\log_2 5;2)$

10. V daném intervalu řešte nerovnice(VŠE):

$a)\ \dfrac{1-x^2}{2-x^2} > 0 \wedge x \in \langle -2;3 \rangle$

$b)\ (1+x)\cdot(2+x) > 20 \wedge x \in \langle 0;1 \rangle$

$c)\ 1 + \dfrac{3}{2}x \geq \dfrac{5}{2}x^2 \wedge x \in \langle 0;1 \rangle$

Výsledky: $a)\ \left\langle -2;-\sqrt{2}\right) \cup (-1;1) \cup \left(\sqrt{2};3\right)$

b) *nemá řešení* $c)\ \langle 0;1 \rangle$

11. Pro která reálná *a* platí(VŠE):

$a \cdot f(a+2) - 1 \geq 2 \cdot (g(a)+1) - h(2a)$

$je-li \quad f(x)2x+3, \quad g(x) = x^2 - x, \quad h(x) = 1 - x^2$

Výsledek: $a \in \left\langle \dfrac{1}{4};2 \right\rangle$

12. V množině reálných čísel řešte exponenciální nerovnice(VŠE):

$a)\ 5^{4x+1}+4>629$

$\text{b)}\ \left(\frac{1}{4}\right)^{2x+3}\leq\left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}$

$c)\ 4^x-3\cdot 2^x<4$

$d)\ \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3x^2-1}{2}}\leq\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

$e)\ 0{,}5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}\leq 64^{-1}$

$f)\ x^{\log x}>100x$

$g)\ \frac{1}{4^x}+\frac{1}{2^x}\geq 20$

Výsledky: $a)\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$ $b)\ \langle 0;+\infty)$ $c)\ (-\infty;2)$

$d)\ (-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;+\infty)$ $e)\ (-\infty;-2\rangle\cup\langle 4;+\infty)$

$f)\left(0;\frac{1}{10}\right)\cup(100;+\infty)$ $g)\ (-\infty;-2\rangle$

13. V množině reálných čísel řešte nerovnice(VŠE):

$a)\ \frac{3+2\log x}{3}\leq 5$

$b)\ \log_5(x+2)<1$

$c)\ \log_8\left(x^2-4x+3\right)<1$

$d)\ \log_{1/2}\left(x^2-x-12\right)>\log_{1/2}(x+3)$

$e)\ \log_3^2 x+\log_3 x\geq 2$

$f)\ \log\frac{2-x}{x-3}\leq -1$

$g)\ \left(x^2-3x\right)\cdot\log(x+1)>0$

$h)\ \left(2x^2-3x-2\right)\log(x+1)>0$

Výsledky: $a)\ \left(0;10^6\right\rangle$ $b)\ (-2;3)$ $c)\ (-1;1)\cup(3;5)$ $d)\ (4;5)$

$e)\left(0;\frac{1}{9}\right\rangle\cup\langle 3;+\infty)$ $f)\left(2;\frac{23}{11}\right\rangle$ $g)\ (3;+\infty)$ $h)\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(2;+\infty)$

14. V R řešte nerovnice(VŠE):

$a)\ \log\sqrt{x^2-4}-\log\sqrt{x+2}<\log 5$

$b)\ \log_{1/3}(5-2x)>-2$

$c)\ \log_2\left(x^2-x-12\right)<3$

$d)\ \log_{1/3}^2 x-4>0$

$e)\ \log_2\left(\sin\frac{x}{2}\right)<-1 \quad v\ \langle 0;2\pi\rangle$

$f)\ |3-\log_2 x|<2$

$g)\ \log_{1/2}(\cos 2x)>1 \quad v\ \langle 0;\pi\rangle$

Výsledky: $a)\ (2;27)$ $b)\left(-2;\frac{5}{2}\right)$

$c)\ (-4;-3)\cup(4;5)$ $d)\left(0;\frac{1}{9}\right)\cup(9;+\infty)$

$e)\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right)$ $f)\ (2;32)$

$g)\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right)$

15. Řešte nerovnice s neznámou $x \in R$ (VŠE):

$a)\ \sqrt{x^2-4} \le x+1 \qquad\qquad c)\ x+1 \le \sqrt{x^2+3x}$

$b)\ \sqrt{x^2-1} < \mathrm{x}+2 \qquad\qquad d)\ x-1 < \sqrt{x^2-4}$

$Výsledky:\quad a)\left\langle 2;+\infty\right) \quad b)\left(-\frac{5}{4};-1\right\rangle \cup \left\langle 1;+\infty\right) \quad c)\left(-\infty;-3\right\rangle \cup \left\langle 1;+\infty\right) \quad d)\left(-\infty;-2\right\rangle \cup \left(\frac{5}{2};+\infty\right)$

16. Řešte v R goniometrické rovnice(VŠE): ><

$a)\ \sin\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad b)\ \cos(x+2) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$c)\ tg(2x-1) < 1 \qquad\qquad d)\ tg3x < -1$

$e)\ \cot g\frac{x}{2} < 1 \qquad\qquad f)\ 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$

$g)\ \cos 4x + \cos 2x < 0 \qquad\qquad h)\ tg^2 x + \cot g^2 x < 2$

$i)\ \cos(\sin x) < 0 \qquad\qquad j)\ \sin(\cos x) > 0$

$k)\ 2\cos^2 x > 3\sin x \qquad\qquad l)\ 2\sin^2 x + 7\cos x - 5 < 0$

$m)\ 2\sin^2 x > (1-\cos x)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$

$Výsledky:\quad a)\left(\frac{4\pi}{3}+4k\pi;\frac{14\pi}{3}+4k\pi\right) \quad b)\left(\frac{5\pi}{6}-2+2k\pi;\frac{7\pi}{6}-2+2k\pi\right)$

$c)\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2};\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right) \quad d)\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}\right) \quad e)\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;2\pi+2k\pi\right)$

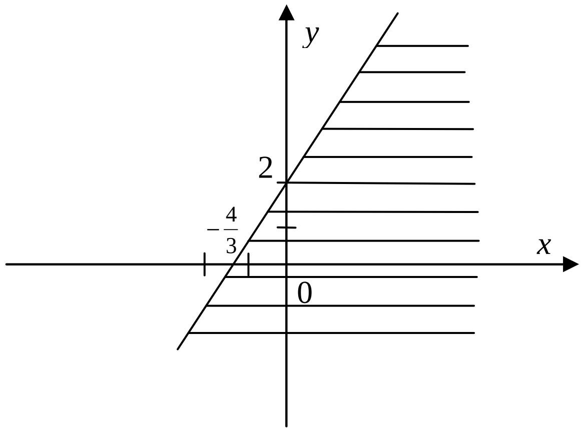
$f)\left\langle 2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi;(2k+2)\pi\right\rangle \quad g)\left(\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{5\pi}{6}+k\pi\right) \quad \wedge \quad x \ne \frac{\pi}{2}+k\pi$

$h)$ *nemá řešení* $\quad i)$ *nemá řešení* $\quad j)\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \quad k)\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\frac{13\pi}{6}+2k\pi\right)$

$l)\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right) \quad m)\left(2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}+2k\pi;2\pi+2k\pi\right)$

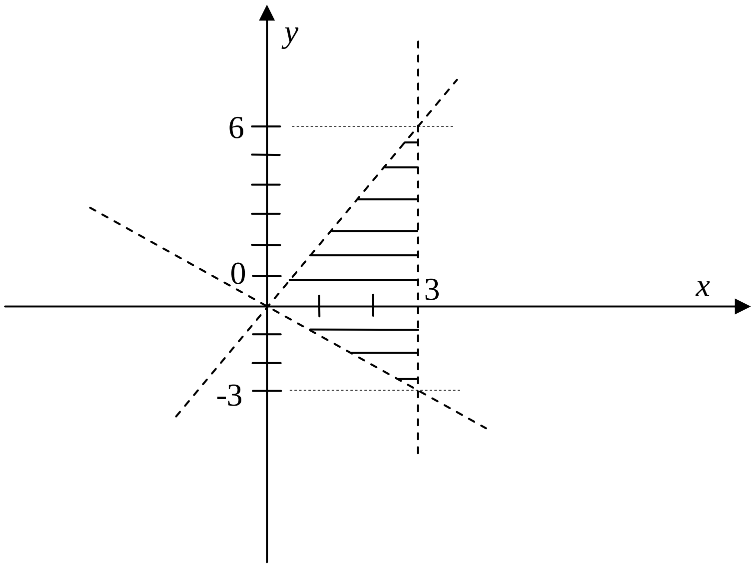
17) V rovině E2 vyznačme množinu bodů, které vyhovují nerovnici(VŠE)

$$3x - 2y + 4 \geq 0$$



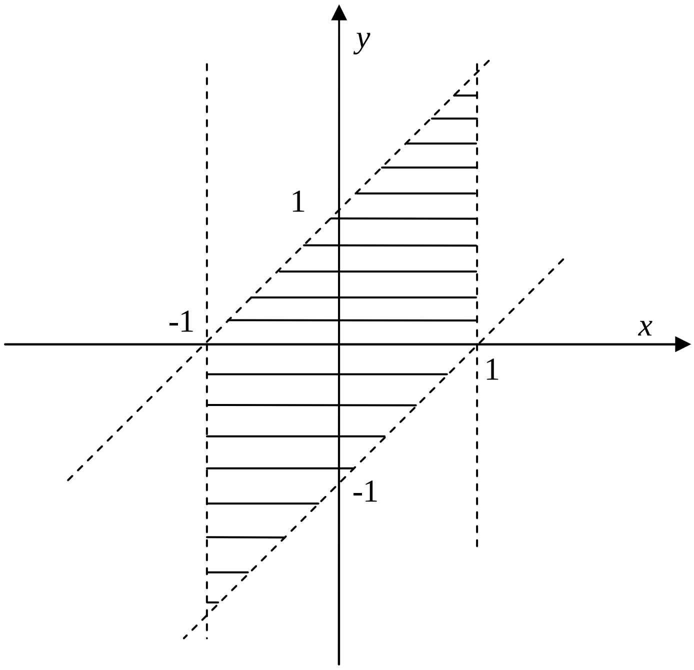
18) V rovině E2 vyznačme množinu bodů, které vyhovují nerovnicím(VŠE)

$$2x - y > 0 \wedge x + y > 0 \wedge x - 3 < 0$$



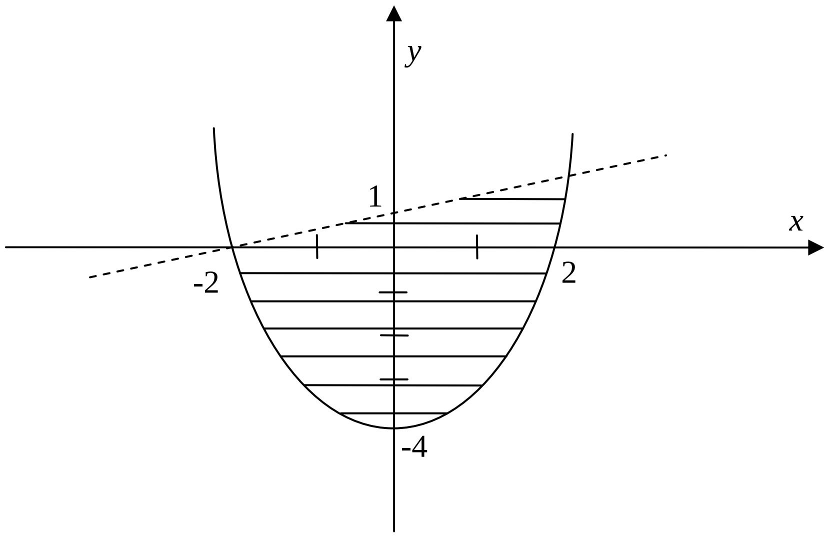
19) V rovině E2 vyznačme množinu bodů, které vyhovují nerovnicím(VŠE)

$$|x-y|<1 \wedge |x|<1$$



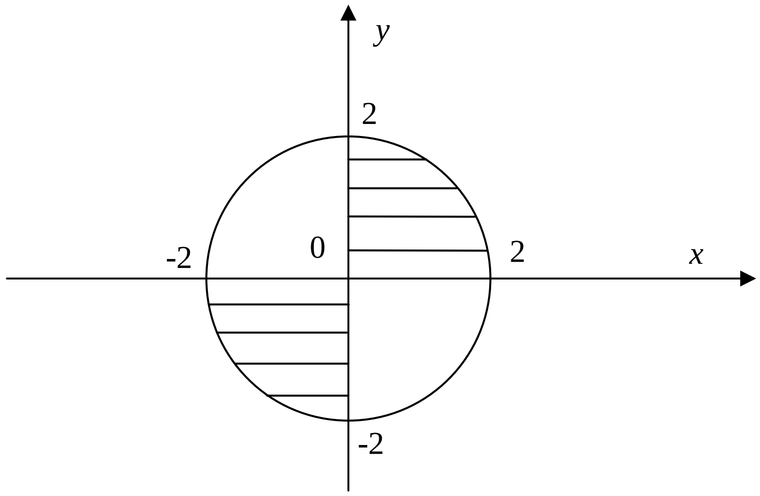
20) V rovině E2 vyznačme množinu bodů, které vyhovují nerovnicím(VŠE)

$$x^2-y-4 \leq 0 \wedge x-2y+2>0$$



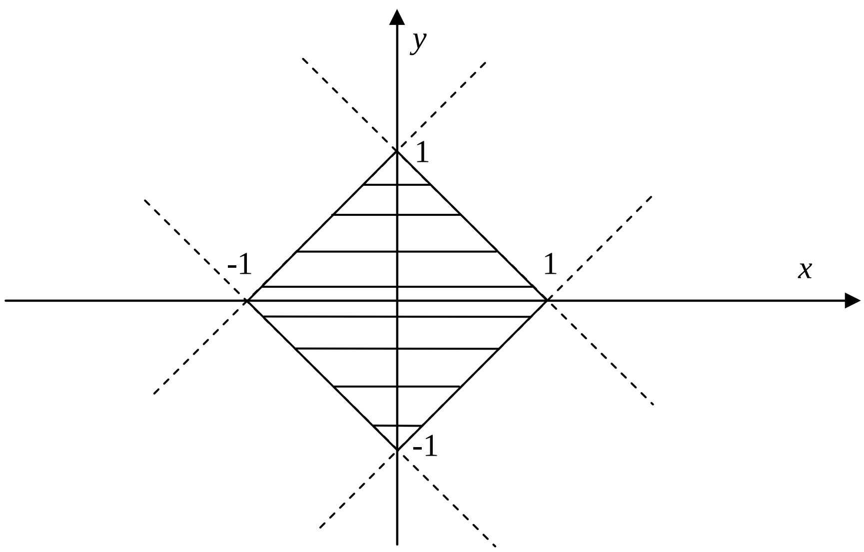
21) V rovině E2 vyznačme množinu bodů, které vyhovují nerovnicím(VŠE)

$x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \cdot y \geq 0$



22) V rovině E2 vyznačme množinu bodů, které vyhovují nerovnici(VŠE)

$|x| + |y| \leq 1$



Literatura:
1) Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9
2) Matematika – příklady pro přijímací zkoušky, RNDr.Petr Rádl a kolektiv, ISBN 80-7157-625-5

Obrázky

Všechny obrázky jsou vytvořeny autorkou DUMu.