DUM č. 18 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 23.01.2014

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Pravděpodobnost - definice, věty, výpočty: teorie, sada úloh s výsledky na procvičení.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název DUMu**: Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravdepodobnost**
Autor: Jarmila Šimečková
Datum: 12.12.2013
Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF
Anotace DUMu: Pravděpodobnost náhodného jevu - teorie, věty o pravděpodobnostech, soubor příkladů s výsledky na procvičení.

18. Pravděpodobnost

Množina všech možných výsledků náhodného pokusu se značí Ω a její prvky ω (o těchto výsledcích se přepokládá, že jsou **elementární**).
Každou podmnožinu množiny Ω nazýváme **náhodným jevem**, značí se A, B apod.; vyjadřuje jekékoliv tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze (po provední pokusu) rozhodnout, zda je pravdivé. Je-li pravdivé, říkáme, že **jev nastává**, v opačném případě říkáme, že **jev nenastává**. Speciálními případy jevů jsou **jistý jev**, představovaný množinou Ω a **nemožný jev**, reprezentovaný prázdnou množinou Ø.

Jev A je částí jevu B (A → B) jestliže nastane vždy, když nastane jev B.
Jevy A, B jsou po sobě **rovné jevy** (A = B) právě když (A → B)∩ (B → A)

Sjednocení jevů A, B je jev A u B, který nastane právě tehdy, když nastane (při realizaci pokusu) jev A nebo jev B.

Průnik jevů A, B je jev A ∩ B, který nastane právě tehdy když nastane (při realizaci pokusu) jev A a zároveň jev B.

Opačný (doplňkový) jev k jevu A je takový jev A´, který nastává právě tehdy, když nenastal jev A.

Jevy A, B, pro které platí A ∩ B = Ø (tj. nemohou zároveň nastat) se nazývají **jevy disjunktní** (vzájemně neslučitelné). O jevech A, B se pak též říká, že se vzájemně vylučují.

Klasická (Laplaceova) definice pravděpodobnosti

Nechť náhodný pokus splňuje předpoklady:

a) všech možných výsledků je konečný počet
b) všechny výsledky jsou stejně možné
c) všechny výsledky se navzájem vylučují (tj. žádné dva nemohou nastat současně)

Pak pravděpodobnsotí jevu A se nazývá číslo $P(A)=\dfrac{m}{n}$ *, kde n je počet všech výsledků (elementárních jevů) nághodného pokusu a m je počet výsledků příznivých jevů A (tj. výsledků, při nichž nastává jev A)*

Věty o pravděpodobnostech

V1: Pravděpodobnost P(A) libovolného náhodného jevu A je nezáporné číslo menší nebo rovné jedné $0 \leq P(A) \leq 1$

V2: Pravděpodobnost jistého jevu Ω je rovna jedné. $P(\Omega) = 1$

Pravděpodobnost nemožného jevu Ø je rovna nule. $P(\varnothing) = 0$

V3: Pro pravděpodobnost sjednocení dvou jevů A,B platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Speciálně, jsou-li jevy A,B disjunktní ($A \cap B = \{\ \}$), pro pravděpodobnost sjednocení jevů A,B platí: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

V4: Pro pravděpodobnost jevu A´ opačného k jevu A platí:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

V5: Náhodné jevy jsou nezávislé tehdy a jen tehdy, když platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

<u>Příklady:</u>

1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou, na jejichž stěnách je 1 až 6 teček, padnou tyto jejich počty:
   a. Padne číslo "5" (jev A) / *p(A)=1/6=0,167*
   b. Nepadne číslo "5" (jev B) / *p(B)=5/6=0,833*
   c. Padne číslo "sudé" (jev C) / *p(C)=1/2=0,5*
   d. Padne číslo "dělitelné třemi" (jev D) / *p(D)=1/3=0,33*

2. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma hracími kostkami padne "součet 7"?
   p(A)=1/6=0,167

3. Určete pravděpodobnost, že při hodu dvěma hracími kostkami padne alespoň jedna "šestka". *p(B)=11/36=0,306*

4. Vy vyrobené sérii součástek je jich 6 nekvalitních. Když se náhodně vybere 10 z nich, jaká je pravděpobnost, že jsou mezi nimi nejvýše "dvě nekvalitní"? *Asi 0,9144*

5. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemiími kostkami padnou "tři šestky"? *1/216*

6. 10 studentů, mezi nimž jsou Adam a Břetislav, má ze svého středu vylosovat tříčlennou komisi. Jaká je pravděpodobnost, že Adam nebo Břetislav budou mezi vylosovanými? *p(A)=8/15=0,53*

7. Jaká je pravděpodobnost jevu A, že při tahu Sportky bude taženo alespoň jedno jednociferné číslo? (Při losování Sportky se vybírá 6 čísel mezi čísly od 1 do 49)

$$p(A)=1-\frac{\binom{40}{6}}{\binom{49}{6}}\cong 0{,}726$$

8. Na "falešné kostce" jsou pravděpodobnosti padnutí čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 po řadě 0,10; 0,15; 0,15; 0,15; 0,15; 0,30.
   a. S jakou pravděpodobností padne sudé číslo? / *0,60*
   b. S jakou číslo nedělitelné třemi? / *0,55*

9. Z úplné hry 32 tzv. mariášových karet vytáhneme náhodně 3 karty. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude aspoň jedno eso? / *0,34*

10. Ve třídě je 18 dívek a 13 chlapců. Pro dozor o přestávkách se losem určí 4 žáci. Jaká je pravděpodobnost, že to budou 2 dívky a 2 chlapci? / *0,38*

11. Ve třídě je 32 žáků, z nichž 10 není připraveno. V hodině budou vyvoláni k tabuli 4 žáci. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude alespoň jeden bez domácího cvičení? / *0,81*

12. V osudí je 6 bílých koulí, 4 červené a 5 modrých. Táhneme postupně 3 koule, přičemž každou vytaženou kouli vrátime do osudí dříve, než táhneme další.
   a. Jaká je pravděpodobnost, že první tažená koule bude bílá, druhá červená a třetí modrá? / *8/225=0,035*
   b. Jaká je pravděpodobnost jevu "každá ze tří tažených koulí má jinou barvu"? / *0,213*

13. Hodíme 20x jednou mincí a zapisujeme si, zda padl líc nebo rub. Jaká je prvděpodobnost, že padne 10x líc?

$$/\ \frac{\binom{20}{10}}{2^{20}}\cong 0{,}176$$

14. V osudí je 5 koulí zelených, očíslovyných od jedné do pěti a 4 červené koule očíslované 1-4. Vytáhneme zaráz 3 koule z osudí. Určete pravděpodobnost následujích jevů
   a. Jev A "všechny 3 vytažené koule jsou zelené" / *p(A)=5/42=0,12*
   b. Jev B "<u>všechny 3 vytažené koule jsou červené</u>" / *p(B)=1/21=0,05*
   c. Jev C "<u>všechny 3 vytažené koule mají stejnou barvu</u>" / *p(C)=1/6=0,17*
   d. Jev D "<u>mezi 3 vytaženými koulemi je zelená koule s číslem 1 a červená koule s číslem 1</u>" / *p(D)=1/12=0,08*
   e. Jev E "<u>mezi 3 vytaženými koulemi je právě jedna zelená a právě jedna s číslem 1</u>" / *p(E)=5/28=0,18*
   f. Jev F "<u>mezi 3 vytaženými koulemi mají dvě stejné číslo</u>" / *p(F)=1/3=0,33*
   g. Zpředchozího výsledku odvoďte pravděpodobnost jevu G "<u>mezi 3 vytaženými koulemi se žádné číslo neopakuje</u>" / *p(G)=1-p(F)=2/3*

15. Z úplné hry 32 karet vytáhneme 4 karty. Vypočítejte pravděpodobnost následujích jevů:
    a. Jev A “všechny 4 karty jsou esa” / *p(A)=1/35960*
    b. Jev B “mezi vytaženými čtyřmi kartami není žádné eso” / *p(B)=0,569*
    c. Jev C “mezi čtyřmi kartami je právě jedno eso” / *p(C)=0,364*
    d. Jev D “mezi čtyřmi kartami je nejvýše jedno eso” / *p(D)=0,934*
    e. Jev E “mezi čtyřmi kartami je nejméně jedno eso” / *p(E)=0,431*

16. Házeme 3x po sobě jednou kostkou, jejíž strany jsou očíslované od 1 do 6. Jaká je pravděpodobnost následujích jevů:
    a. Jev A “při první hodu padne 6” / *p(A)=1/6*
    b. Jev B “šestka padne právě jednou” / *p(B)=75/216*
    c. Jev C “šestka padne právě dvakrát” / *p(C)=15/216*
    d. Jev D “šestka padne při každém hodu” / *p(D)=1/216*
    e. Jev E “šestka nepadne ani jednou” / *p(E)=125/216*

17. V osudí je 9 žetonů očíslovaných 1-9. Táhneme postupně, bez toho, že bychom vytažené žetony do osudí vraceli, 4 žetony z osudí. Vytažené žetony řadíme postupně vedle sebe, zleva doprava. Určete pravděpodobnost následujích jevů:
    a. Jev A “získané číslo je 1789” / *p(A)=1/3024*
    b. Jev B “získáme číslo je 2334” / *p(B)=0*
    c. Jev C “získáme číslo začínájící sedmičkou” / *p(C)=1/9*
    d. Jev D “získáme číslo složené jen ze sudých číslic” / *p(D)=1/126*
    e. Jev E “získáme číslo obsahující aspoň jednu lichou číslici”/ *p(E)=1-p(D)*
    f. Jed F “získáme číslo dělitelné pěti” / *p(F)=1/9*

18. Hodíme 4x jednou mincí a výsledky si zapisujeme. Vypočítejte pravděpodobnost následujích jevů:
    a. Jev A “při všech čtyřech hodech padne rub” / *p(A)=1/16*
    b. Jev B “mezi čtyřmi hody padne 3x rub” / *p(B)=1/4*
    c. Jev C “mezi čtyřmi hody padne 2x rub” / *p(C)=6/24*
    d. Jev D “mezi čtyřmi hody padne 1x rub” / *p(D)=1/4*
    e. Jev E “mezi čtyřmi hody nepadne rub ani jednou” / *p(E)=1/16*
    f. Jev F “mezi čtyřmi hody padne nejméně 1x líc” / *p(F)=1- p(A = 15/16)*

Literatura:

Přehled středoškolské matematiky, Josef Polák, ISBN 80-85849-78-X