

DUM č. 1 v sadě

Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komplexní čísla

14.

Autor: Magda Krejčová

Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Geometrie v rovině: trojúhelník-řešení pravoúhlého a obecného trojúhelníku.

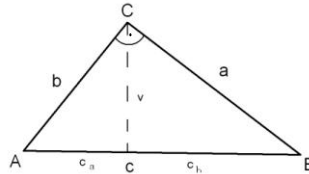
Materiály jsou určeny pro bezplatné používání pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Geometrie v rovině: trojúhelník – řešení pravoúhlého a obecného trojúhelníku

Pravoúhlý trojúhelník (pravý úhel při vrcholu C):



1. Pythagorova věta: $c^2 = a^2 + b^2$
2. Euklidova věta o výšce: $v^2 = c_a \cdot c_b$
3. Euklidova věta o odvěsně:
 $a^2 = c \cdot c_a$
 $b^2 = c \cdot c_b$

Trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \cot \alpha = \frac{b}{a}$$

Trigonometrie obecného trojúhelníku:

Věta sinová: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$

r . . . poloměr kružnice opsané trojúhelníku

Věta kosinová:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Trojúhelníková nerovnost

Grafický součet libovolných dvou stran trojúhelníku je větší než třetí strana.

$$a + b > c \quad \wedge \quad b + c > a \quad \wedge \quad c + a > b$$

Věta : Proti shodným stranám trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly, proti větší straně trojúhelníku leží větší vnitřní úhel . Pro délky stran a velikosti vnitřních úhlů tedy platí:

$$a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta \quad a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

- Kružnici o poloměru $r = 6 \text{ cm}$ je opsán rovnostranný trojúhelník. Vypočtěte jeho obsah a obvod.
MZLU
 $o = 36\sqrt{3}$ $S = 108\sqrt{3}$
- Do kružnice o poloměru 6 cm je vepsán rovnostranný trojúhelník. Vypočtěte jeho obsah a obvod.
MZLU
 $o = 18\sqrt{3}$ $S = 27\sqrt{3}$
- Vypočtěte poloměr kružnice opsané trojúhelníku, $c = 27 \text{ cm}$, $\alpha = 39^\circ$, $\beta = 63^\circ$.
MZLU
 $r = \frac{27}{2 \cdot \sin 78^\circ} \approx 13,8 \text{ cm}$
- Je dán trojúhelník o stranách 8 cm , 9 cm , 10 cm . O kolik cm je třeba všechny strany zkrátit, aby z nich bylo možno sestavit trojúhelník pravoúhlý?
MZLU
 $r = 5 \text{ cm}$
- Vypočtěte největší vnitřní úhel trojúhelníku o stranách
 a) 35 cm , 55 cm , 60 cm
 b) 14 cm , 18 cm , 22 cm
MZLU
 a) $\cos \varphi = \frac{55^2 + 35^2 - 60^2}{2 \cdot 55 \cdot 35}$ $\varphi \approx 80,3^\circ$
 b) $\cos \varphi = \frac{14^2 + 18^2 - 22^2}{2 \cdot 14 \cdot 18}$ $\varphi \approx 85,9^\circ$
- Vypočtěte nejmenší vnitřní úhel trojúhelníku o stranách
 a) 13 cm , 15 cm , 18 cm
 b) 30 cm , 55 cm , 70 cm
MZLU
 a) $\cos \varphi = \frac{15^2 + 18^2 - 13^2}{2 \cdot 15 \cdot 18}$ $\varphi \approx 45,3^\circ$
 b) $\cos \varphi = \frac{55^2 + 70^2 - 30^2}{2 \cdot 55 \cdot 70}$ $\varphi \approx 24,2^\circ$
- Vypočtěte velikosti zbývajících stran trojúhelníku ABC, ve kterém
 a) $a = 85$ $b = 70$ $\gamma = 50^\circ$
 b) $a = 75$ $c = 40$ $\beta = 70^\circ$
 c) $b = 60$ $\alpha = 80^\circ$ $\gamma = 30^\circ$
 d) $c = 15$ $\alpha = 50^\circ$ $\beta = 60^\circ$
 e) $c = 150$ $\alpha = 45^\circ$ $\gamma = 55^\circ$
MZLU

- a) $c \approx 66,9$
 b) $b \approx 71,9$
 c) $a \approx 62,9$ $c \approx 31,9$
 d) $a \approx 12,2$ $b \approx 13,8$
 e) $a \approx 129,5$ $b \approx 180,3$
8. Vypočítejte velikosti stran a vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, když
 a) $a = 15$ $b = 14$
 b) $a = 40$ $b = 66$
 MZLU
 a) $\beta \approx 53,9^\circ$ $\gamma \approx 66,1^\circ$ $c \approx 15,8$
 b) $\alpha \approx 36,6^\circ$ $\gamma \approx 63,4^\circ$ $c \approx 59,9$
9. Trojúhelník ABC má obvod 26 cm , délky stran $a = 6,5 \text{ cm}$, $b = 11,2 \text{ cm}$. Seřadte jeho vnitřní úhly podle velikosti.
 VUT
 $\beta > \gamma > \alpha$
10. V pravouhlém trojúhelníku s přeponou c je dána odvěsna $a = 4 \text{ cm}$, těžnice $t_a = 6 \text{ cm}$. Vypočítejte délku těžnice t_b .
 $2\sqrt{6}$
11. Vypočítejte vzdálenost dvou míst A a B, mezi nimiž leží překážka. Byly změřeny vzdálenosti $AC = 258,5 \text{ m}$, $BC = 327,5 \text{ m}$ a úhel $\sphericalangle ACB = 65^\circ 30'$.
 $AB \approx 322,3 \text{ m}$
12. Vypočítejte vzdálenost AB, jestliže v konvexním čtyřúhelníku ABCD je dáno:
 $AD = 35 \text{ m}$, $DC = 120 \text{ m}$, $CB = 85 \text{ m}$, $\sphericalangle ADC = 105^\circ$, $\sphericalangle DCB = 72^\circ$.
 113 m
13. Vypočítejte velikosti úhlů v trojúhelníku ABC, znáte-li délky stran $c = 10 \text{ cm}$, $b = 14 \text{ cm}$ a poměr velikostí dvou úhlů $\beta : \gamma = 2:1$.
 $\alpha = 43^\circ 17'$; $\beta = 91^\circ 9'$; $\gamma = 45^\circ 34'$
14. Vypočítejte šířku řeky, jestliže na jednom břehu byla vyznačena úsečka KL délky 40 m a dále byly změřeny úhly $|\sphericalangle LKS| = 76^\circ 24'$ a $|\sphericalangle KLS| = 43^\circ 52'$, kde S je bod na druhém břehu řeky.
 $31,2 \text{ m}$
15. Na těleso působí v jednom bodě dvě síly $F_1 = 40 \text{ N}$ a $F_2 = 70 \text{ N}$, které svírají úhel 50° . Určete velikost výslednice F a úhel, který svírají síly F a F_1 .
 $F = 100 \text{ N}$, $|\sphericalangle F F_1| = 32^\circ$

16. Užitím kosinové věty dokažte, že všechny úhly v rovnostranném trojúhelníku mají velikost 60° .
17. Bod S je střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, je-li dána délka těžnice $t_c = 4 \text{ cm}$ a $|\sphericalangle ASC| = 30^\circ$.
nápověda: $t_c = |SB|$...Thaletova kružnice $S = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$
18. Tři síly $F_1 = 10N$, $F_2 = 20N$, $F_3 = 27N$ působí na těleso v jednom bodě v téže rovině a jsou v rovnováze. Vypočítejte úhly, které svírají jednotlivé síly navzájem.
 $|\sphericalangle F_1 F_2| = 55^\circ$; $|\sphericalangle F_2 F_3| = 162^\circ$; $|\sphericalangle F_1 F_3| = 143^\circ$.

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5