DUM č. 6 v sadě

14. Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komlexní čísla

Autor: Magda Krejčová

Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Geometrie v rovině: shodná a podobná zobrazení, podobnost.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Geometrie v rovině: shodná a podobná zobrazení v rovině, podobnost

Shodná zobrazení (isometrie)

Pro každé dvě dvojice vzorů a obrazů $[X;\, X'], [Y;\, Y']$ platí $|X'Y'| = |XY|$.

Mezi shodná zobrazení patří:

- středová souměrnost
- osová souměrnost
- identita
- posunutí
- otáčení

Samodružné body jsou body, které se zobrazí samy na sebe.

Středová souměrnost je jednoznačně určena svým středem. Existuje jeden samodružný bod: střed souměrnosti.
Osová souměrnost je jednoznačně určena svojí osou. Existuje nekonečně mnoho samodružných bodů: všechny body na ose souměrnosti.
Identita má všechny body samodružné.
Posunutí je jednoznačně určeno vektorem posunutí. Neexistuje žádný samodružný bod.
Otáčení je jednoznačně určeno středem otáčení a orientovaným úhlem. Existuje jeden samodružný bod: střed otáčení.

Pro všechna shodná zobrazení platí:

- obrazem úsečky je úsečka stejné velikosti
- obrazem přímky je přímka
- obrazem kružnice je kružnice o stejné poloměru.

Shodná zobrazení zachovávají:

- délky
- velikosti úhlů (ne orientaci!)
- rovnoběžnost, kolmost
- polohu bodů na jedné přímce

Podobná zobrazení

Stejnolehlost (homotetie) je podobné zobrazení jednoznačně určené středem stejnolehlosti S a koeficientem stejnolehlosti k ($k \in \boldsymbol{R}$, $k \neq 0$), které

a) bodu S přiřazuje obraz $S' = S$
b) bodu $M \neq S$ přiřazuje obraz M' takový, že platí: $\overrightarrow{SM'} = k \cdot \overrightarrow{SM}$.

Tedy M' leží na polopřímce SM pro $k > 0$, respektive na polopřímce opačné k polopřímce SM pro $k < 0$.
Existuje jeden samodružný bod: střed stejnolehlosti.

- obrazem přímky je přímka rovnoběžná s původní přímkou
- obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$ rovnoběžná s AB a $|A'B'| = |k| \,.\, |AB|$
- obrazem kružnice k o poloměru r je kružnice k' o poloměru $r' = |k| \,.\, r$
- obrazem geometrického útvaru o obsahu S je geometrický útvar o obsahu $k^2 \cdot S$

Podobnost

Pro každé dvě dvojice vzorů a obrazů $[X;\, X'], [Y;\, Y']$ platí $|X'Y'| = k \cdot |XY|$, kde $k > 0$ je daná konstanta, zvaná koeficient podobnosti. Zvláštním případem podobnosti pro $k = 1$ je shodnost.

Podobnost trojúhelníků

Dva trojúhelníky *ABC* a *A´B´C´* se nazývají podobné trojúhelníky, právě když existuje takové kladné číslo *k*, že platí:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k$$

Píšeme pak $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Je- li $k > 1$, představuje podobnost zvětšení, je- li $0 < k < 1$, představuje zmenšení, pro $k = 1$ je to shodnost.

Věta: V podobných trojúhelnících *ABC, A´B´C´* jsou odpovídající si úhly shodné a tedy platí $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.

Věta: Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže

a) se shodují ve dvou úhlech (věta uu)
b) jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou- li shodné úhly jimi sevřené (věta sus)
c) jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou- li shodné úhly proti větší z nich (věta Ssu)

1. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M ($M \notin p$, $M \notin q$). Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo: X leží na p, Y leží na q a bod M je střed úsečky XY.
   středová souměrnost se středem M

2. Je dána přímka p, přímka $a \parallel p$ a přímka c různoběžná s přímkou p. Sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol A leží na přímce a, vrchol C na přímce c a úhlopříčka BD na přímce p.
   osová souměrnost podle přímky p

3. Jsou dány soustředné kružnice k_1 (S; 3 cm); k_2 (S; 4,5 cm) a bod C uvnitř kružnice k_1. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby vrchol A ležel na kružnici k_2 a vrchol B na kružnici k_1.
   otáčení kolem C o ± 60°

4. Je dána kružnice k a přímka p. Dále je dána úsečka AB. Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo X leží na k, Y leží na p, úsečka XY je rovnoběžná s úsečkou AB a je stejně dlouhá jako úsečka AB. Zvolte postupně vzájemnou polohu kružnice a přímky tak, aby úloha měla 4, resp. 3, resp. 2, resp. 1, resp. 0 řešení.
   posunutí o vektor $\overrightarrow{AB}$

5. Je dána úsečka OP, $|OP| = 4$ cm. Sestrojte kružnici k (O; 2,5 cm) a přímku p, p je kolmá k OP a zároveň bod P leží na p. Dále sestrojte jeden bod M, pro který platí $|OM|$ $= 3$ cm a velikost úhlu POM je 30°.
   a) Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby platilo A leží na k a zároveň C leží na p a zároveň $M = S$, kde S je střed čtverce $ABCD$.
   středová souměrnost; S(M): k → k´; O leží na p ∩ k´; úloha má 2 řešení
   b) Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby platilo B leží na k a zároveň D leží na p a zároveň $A = M$.
   otáčen;, R(M; ±90°); k → k´; C leží na průniku p a k´, úloha má 2 řešení
   c) Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby platilo A leží na k a zároveň C leží na p a zároveň body B a D leží na $\leftrightarrow PM$.
   osová souměrnost; O(↔PM); k → k´; C leží na průniku p a k´, úloha má 2 řešení
   d) Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby platilo C leží na k a zároveň B leží na p a zároveň $A = M$.
   otáčení; R(M; ±60°): k → k´; B leží na průniku p a k´, úloha má 2 řešení
   e) Sestrojte všechny rovnoběžníky $MOKL$ tak, aby platilo K leží na k a zároveň L leží na p.
   posunutí; T(OM): k → k´; L leží na průniku p a k´, úloha má 2 řešení
   f) Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB tak, aby platilo B leží na k a zároveň A leží na p a zároveň $v_c \in \leftrightarrow PM$ a zároveň $C = M$.
   osová souměrnost; O(↔PM); k → k´; A leží na průniku p a k´, úloha má 2 řešení

6. Je dána úsečka CS_1, $|CS_1| = 3$ cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je úsečka CS_1 těžnicí t_c a pro které dále platí $a = 3{,}5$ cm; $b = 5$ cm.
   k(C,5); S(S_1*): k → k´; B leží na průniku k´ a l(C;3,5), 1 řešení*

7. V ostroúhlém trojúhelníku ABC veďte kolmici z bodu B na stranu AC, její patu označte B_1. Patu kolmice z bodu A na stranu BC označte A_1.
   Dokažte, že $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$.

$\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ podle věty UU ⇒ $|A_1C|:|AC|=|B_1C|:|BC|$, úhel γ je společný ⇒ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$.

8. Do rovnostranného trojúhelníku *ABC* o straně délky *a* je vepsán čtverec. Vypočítejte délku strany čtverce.
   vyjdeme z podobnosti trojúhelníků $\dfrac{v}{\frac{a}{2}} = \dfrac{x}{\frac{a}{2}-\frac{x}{2}} \ldots \Rightarrow x = a\left(2\sqrt{3}-3\right)$

9. Jsou dány kružnice $k_1(O_1;\ 4\ cm)$, $k_2(O_2;\ 2\ cm)$; $|O_1O_2| = 9\ cm$. Vypočítejte vzdálenost středů stejnolehlosti daných kružnic k_1, k_2 .
   z podobnosti Δ, $|S_1S_2| = 12cm$

10. Jsou dány 2 kružnice: $k_1(S_1;\ 6\ cm)$, $k_2(S_2;\ 2{,}5\ cm)$; $|S_1S_2| = 10\ cm$. Sestrojte společné tečny těchto dvou kružnic.
    Nejprve sestrojíme středy stejnolehlosti těchto kružnic, pak pomocí Thaletovy kružnice vedeme tečny ke kružnici z těchto středů.

11. Je dán úhel *AVB* o velikosti 45° a bod *M*, který leží uvnitř úhlu *AVB* tak, že vzdálenost *M* od $\mapsto VB$ je 1,5 *cm*, vzdálenost *M* od $\mapsto VA$ je 3 *cm*. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají ramen úhlu a procházejí bodem *M*.
    Stejnolehlost se středem V. Narýsujte libovolnou kružnici l(L; r), která se dotýká ramen úhlu AVB. Označte M_1, M_2 průsečíky kružnice l s přímkou VM. Přímky vedené bodem M rovnoběžně s M_1L, M_2L protínají osu úhlu AVB v bodech S_1, S_2, což jsou středy hledaných kružnic.

12. Je dána kružnice $k(O;\ 4{,}5\ cm)$ a bod *M*, $|OM| = 3{,}6\ cm$. Sestrojte všechny tětivy *XY* kružnice *k*, které procházejí bodem *M* tak,že bod *M* dělí tětivu *XY* v poměru 3 : 1.
    stejnolehlost se středem M, $k = -\dfrac{1}{3}$. $k \to k'$, $X = k \cap k'$, *2 řešení*

13. Je dána kružnice $k(O;\ 4\ cm)$ a bod *M*; $|OM| = 9\ cm$. Sestrojte přímku procházející bodem *M* tak, aby kružnici *k* protínala v bodech *X*, *Y* a aby dále platilo $|XY| = |XM|$.
    stejnolehlost o středu M; $k = \dfrac{1}{2}$, $k \to k'$, $X = k \cap k'$, *2 řešení*

14. Sestrojte všechny trojúhelníky *ABC*, je-li dáno:
    a) $a : b = 4 : 5$, $\gamma = 60°$, $v_c = 5\ cm$
    b) $a : b : c = 3 : 4 : 6$ a poloměr kružnice opsané je 5*cm*
    c) $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, poloměr kružnice opsané jsou 4 *cm*
    VUT
    a) stejnolehlost se středem C
    b) stejnolehlost se středem ve středu kružnice opsané
    c) stejnolehlost se středem ve středu kružnice opsané

15. Do trojúhelníku *ABC* ($a = 5\ cm$, $b = 6\ cm$, $c = 7\ cm$) vepište čtverec *KLMN* tak, aby platilo *KL* leží na *AB* a zároveň *M* leží na *BC* a zároveň *N* leží na *AC*.

stejnolehlost se středem C: narýsujte pomocný čtverec $K_1L_1M_1N_1$ tak, aby $K_1L_1 \parallel AB$, M_1 leží na BC a zároveň N_1 leží na AC. Potom K leží na $AB \cap \leftrightarrow CK_1$, L leží na $AB \cap \leftrightarrow CL_1$. KL je strana čtverce.

16. Z kusu plechu tvaru kruhové výseče vyřízněte co největší kruh.
    VUT
    stejnolehlost se středem S

17. Jsou dány 2 kružnice $k_1(O_1; 4\ cm)$, $k_2(O_2; 2{,}5\ cm)$, $|O_1O_2| = 8\ cm$. Do kružnice k_1 je vepsán obecný trojúhelník *ABC*. Sestrojte v druhé kružnici trojúhelník s ním stejnolehlý.
    využijeme středů stejnolehlosti kružnic

18. Je dán úhel *AVB* a jeho velikost je 30˚. Uvnitř úhlu sestrojte bod *M*, pro který platí, že vzdálenost bodu *M* od $\mapsto AV$ je 1,5 *cm*, vzdálenost bodu *M* od $\mapsto BV$ je 2 *cm*. Sestrojte všechny úsečky *XY* tak, aby bod *X* ležel $\mapsto AV$, bod *Y* na $\mapsto VB$ a bod *M* dělil úsečku *XY* v poměru 1 : 2.
    Stejnolehlost se středem M, k = -2. $(\mapsto VA) \rightarrow (\mapsto V'A')$, *Y leží na průniku* $\mapsto VB$ *a* $\mapsto V'A'$. *úloha má 1 řešení*

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5