DUM č. 11 v sadě

14. Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komlexní čísla

Autor: Magda Krejčová

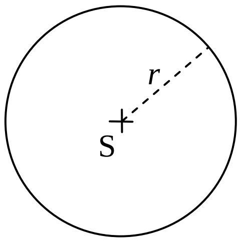
Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

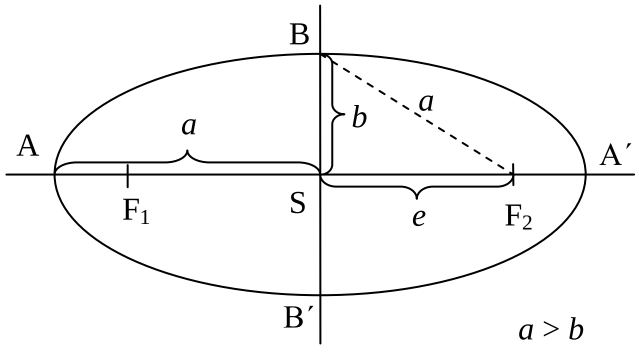
Anotace DUMu: Analytická geometrie v rovině: kuželosečky - kružnice a elipsa.

Analytická geometrie v rovině: kuželosečky - kružnice, elipsa

Kružnice – kružnicí o středu S a poloměru r nazýváme množinu bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost r od středu S.
obecná rovnice kružnice: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad A, B, C \in R$
středový tvar rovnice kružnice: $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2 \qquad S[x_{S;}\ y_S] \qquad r > 0$
rovnice tečny kružnice v bodě $T[x_0; y_0]$: $(x - x_S)(x_0 - x_S) + (y - y_S)(y_0 - y_S) = r^2$

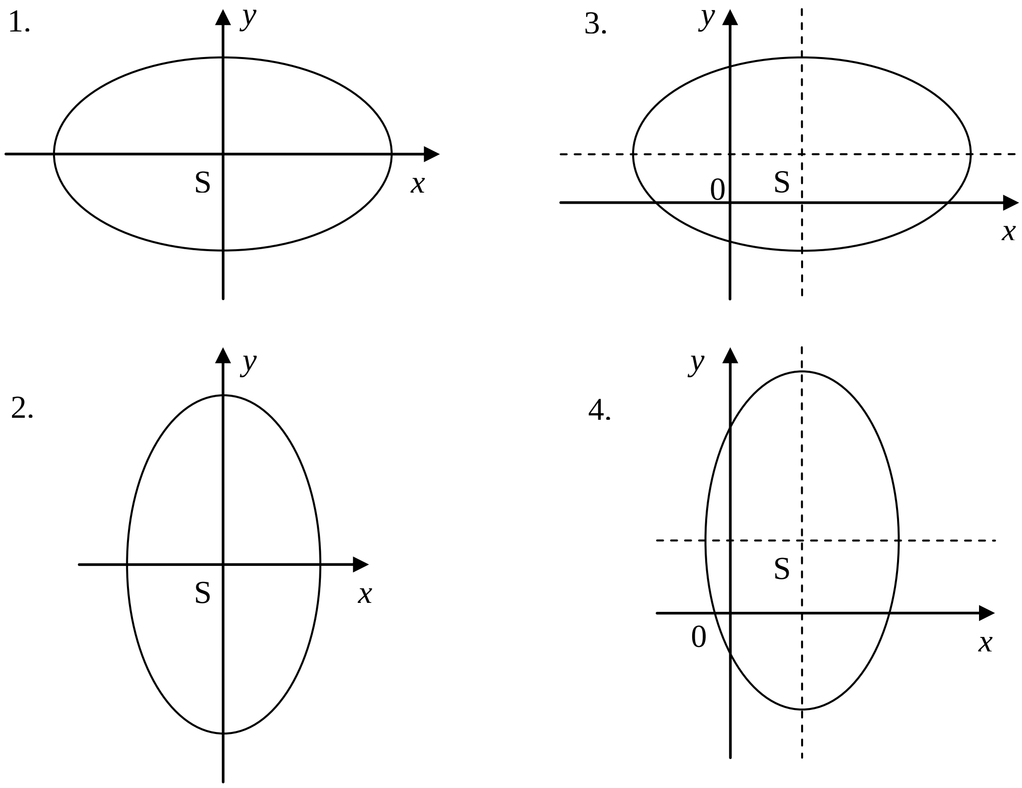


Elipsa – množina všech bodů v rovině, které mají od dvou daných různých bodů F_1, F_2 stálý součet vzdáleností 2a.
Body F_1, F_2 se nazývají ohniska elipsy, S je střed elipsy, přímka F_1, F_2 se nazývá hlavní osa elipsy, kolmice k hlavní ose vedená středem elipsy se nazývá vedlejší osa elipsy.
a ... délka hlavní poloosy
b ... délka vedlejší poloosy
$e = \sqrt{a^2 - b^2}$ … excentricita (výstřednost) elipsy
obecný tvar rovnice elipsy: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad A > 0, B > 0, A \neq B$



středový tvar elipsy:

1. $S[0;0] \qquad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
2. $S[0;0] \qquad \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$
3. $S[x_S; y_S] \qquad \dfrac{(x - x_S)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_S)^2}{b^2} = 1$
4. $S[x_S; y_S] \qquad \dfrac{(x - x_S)^2}{b^2} + \dfrac{(y - y_S)^2}{a^2} = 1$



Rovnice tečny elipsy v bodě dotyku $T[x_0; y_0]$:

ad 1. $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

ad 2. $\dfrac{xx_0}{b^2} + \dfrac{yy_0}{a^2} = 1$

ad 3. $\dfrac{(x - x_S)(x_0 - x_S)}{a^2} + \dfrac{(y - y_S)(y_0 - y_S)}{b^2} = 1$

ad 4. $\dfrac{(x - x_S)(x_0 - x_S)}{b^2} + \dfrac{(y - y_S)(y_0 - y_S)}{a^2} = 1$

1. Zjistěte, jaká kuželosečka je vyjádřena danou rovnicí. Určete její střed, její poloměr nebo poloosy.
   a) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 20 = 0$
   b) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0$
   MZLU
   a) kružnice, S[−4; −3], r = 5
   b) elipsa, S[1; 0]; a = 3, b = 2

2. Vypočítejte vzdálenost bodu A[8; 1] od středu kružnice dané rovnicí
   $x^2 - 4x + y^2 + 14y + 48 = 0$.
   VŠE
   d = 10

3. Pro jaké reálné q je přímka $y = 3x + q$ tečnou kružnice o rovnici
   $x^2 + 4x + y^2 - 8y + 10 = 0$? Určete souřadnice dotykového bodu.
   VŠE
   q = 0 nebo q = 20; T_1[1; 3], T_2 [-5; 5]

4. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází středy kružnic o rovnicích
   $x^2 + y^2 + 14x - 16y + 77 = 0$ a $x^2 + y^2 + 18x - 14y + 66 = 0$.
   VŠE
   p: x – 2y + 23 = 0

5. Napište rovnici kružnice, která prochází počátkem soustavy souřadnic, bodem A[2; 4] a má střed na ose x.
   VŠE
   $\mathrm{k} : (\mathrm{x} - 5)^2 + \mathrm{y}^2 = 25$

6. Kružnice prochází body A[−6; 3], B[0; 5] a má střed na přímce o rovnici
   $2x - y + 5 = 0$. Napište její rovnici.
   VŠE
   $\mathrm{k} : (\mathrm{x} + 2)^2 + (\mathrm{y} - 1)^2 = 20$

7. Vypočtěte velikost tětivy, kterou vytne kružnice o rovnici $x^2 + y^2 = 17$ na přímce
   $x - y = 3$.
   VŠE
   $5\sqrt{2}$

8. Určete souřadnice středu, velikost poloos a lineární excentricitu elipsy
   $x^2 + 4y^2 + 4x - 21 = 0$.
   VŠE
   S[−2; 0] a = 5 b = 2,5 e = $\frac{5}{2}\sqrt{3}$

9. Určete vzájemnou polohu elipsy $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{13} = 1$ a přímky $y = 2x + 13$.

VŠE
tečna, bod dotyku T[−6; 1]

10. Zjistěte, jaká křivka je definována následující rovnicí. Určete souřadnice středu této křivky, délky poloos, excentricitu (příp. poloměr).
    a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$
    b) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 54y + 49 = 0$
    c) $9x^2 + 25y^2 - 126x + 300y + 1116 = 0$
    VŠE
    a) kružnice, S[2; 1], r = 5
    b) elipsa, S[-1; 3], a = 3 b = 2 e = $\sqrt{5}$
    c) elipsa, S[7; -6], a = 5 b = 3 e = 4

11. Napište rovnici kružnice, jejímž průměrem je úsečka *AB*, kde *A*[4; 1] a *B*[2; -5].
    VŠE
    $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$

12. Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku *ABC*, kde *A*[4; 4], *B*[−1; 1] a *C*[2; −4].
    VŠE
    $x^2 + y^2 - 6x - 8 = 0$

13. V rovině E_2 je dán trojúhelník *KLM.*
    a) Rozhodněte (výpočtem, nikoliv pomocí náčrtku), zda jde o pravoúhlý trojúhelník. V případě, že ano, označte vrchol pravého úhlu.
    b) Napište rovnici kružnice opsané tomuto trojúhelníku.
    Úlohu řešte pro souřadnice *K*[3; 0], *L*[−1; 3], *M*[1; −1].
    VŠE
    a) pravý úhel při vrcholu M
    b) $x^2 + y^2 - 2x - 3y - 3 = 0$

14. V rovině E_2 jsou dány dvě kružnice.
    a) Spočtěte vzdálenost středů obou kružnic.
    b) Na základě výpočtu u části a) rozhodněte o jejich vzájemné poloze (zdůvodněte).
    Úlohu řešte pro $k_1 : x^2 + y^2 + 14x - 16y + 77 = 0$ a $k_2 : x^2 + y^2 + 18x - 14y + 66 = 0$.
    VŠE
    a) $d(S_1; S_2) = \sqrt{5}$
    b) $|r_1 - r_2| = |8 - 6| < \sqrt{5} < 8 + 6 = r_1 + r_2$. *Kružnice se protínají ve 2 bodech*

15. Napište rovnici tečny kružnice dané rovnicí $x^2 + y^2 = 20$ v bodě *T*[2; ?].
    VŠE
    $t_1 : x + 2y - 10 = 0 \quad T_1[2; 4] \qquad t_2 : x - 2y - 10 = 0 \quad T_1[2; -4]$

16. Napište rovnici kružnici, která má střed v bodě *S*[1; −3] a jejíž tečnou je přímka $x + 2y - 5 = 0$.
    VŠE
    $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$

17. Ke kružnici $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ veďte tečnu rovnoběžnou s přímkou 2*x* - *y* - 7 = 0.
VŠE
$2x - y + 13 \pm 6\sqrt{5} = 0$

18. Určete rovnice tečen kružnice dané rovnicí $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$, vedených z bodu *P*[0; 0].
VŠE
$t_1 : x - y = 0 \qquad t_2 : x + 7y = 0$

19. V rovině E_2 jsou dány dvě kružnice, které se protínají ve dvou bodech *A*[2; 2], *B*[0; 6]. Napište rovnice obou kružnic, víte-li, že tyto kružnice mají shodné poloměry a vzdálenost jejich středů je $4\sqrt{5}$.
VŠE
$k_1 : x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0 \quad k_2 : x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

20. Rozhodněte, zda body *A*[4; 5], *B*[0; 3] a *C*[1; 2] leží na elipse, vně nebo uvnitř elipsy, jejíž rovnice je $9x^2 + 5y^2 = 45$.
VŠE
A vně elipsy, B na elipse, C uvnitř elipsy

21. Pro jaké *q* je přímka *y* = *x* + *q*
a) sečnou
b) tečnou
c) vnější přímkou
elipsy dané rovnicí $9x^2 + 25y^2 = 144$?
VŠE
a) $q \in (-5; 5)$
b) $q = \pm 5$
c) q > 5

22. Napište rovnici tečny elipsy $9x^2 + 25y^2 = 225$, která je rovnoběžná s přímkou 4*x* + 5*y* - 7 = 0.
VŠE
4 x + 5*y* $\pm$ 25 = 0

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5