DUM č. 12 v sadě

14. Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komlexní čísla

Autor: Magda Krejčová

Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Analytická geometrie v rovině: kuželosečky - hyperbola.

Materiály jsou určeny pro bezplatné používání pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Analytická geometrie v rovině: kuželosečky - hyperbola

Hyperbola – množina všech bodů v rovině, které mají tu vlastnost, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od dvou daných různých bodů F_1, F_2 je stálá ($2a$).

F_1, F_2 ohniska hyperboly, přímka F_1, F_2 hlavní osa hyperboly, střed úsečky F_1, F_2 je střed hyperboly, kolmice k hlavní ose vedená středem hyperboly se nazývá vedlejší osa hyperboly.

a ... délka hlavní poloosy

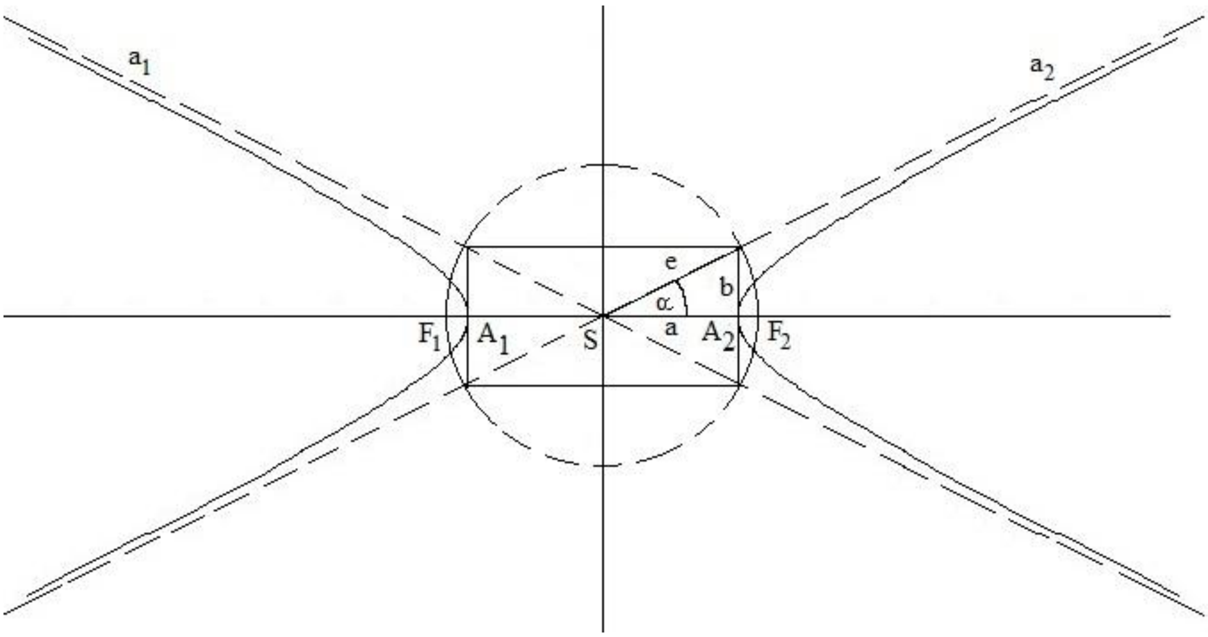
b ...délka vedlejší poloosy

$e = \sqrt{a^2 + b^2}$ ... excentricita hyperboly

Je-li *a* = *b*, nazývá se hyperbola rovnoosá.

a_1, a_2 ... asymptoty hyperboly o směrnicích $tg\alpha = \frac{b}{a}$

Obecný tvar rovnice hyperboly: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad A \cdot B < 0$



středový tvar rovnice hyperboly:

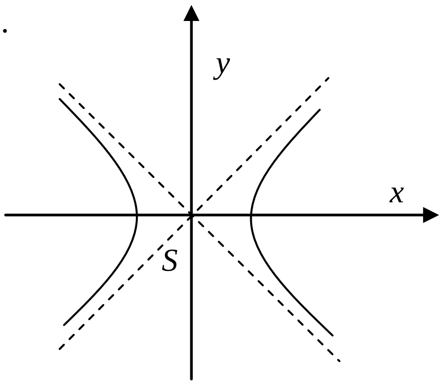
1. $S[0;0]$ $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. $S[0;0]$ $\quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

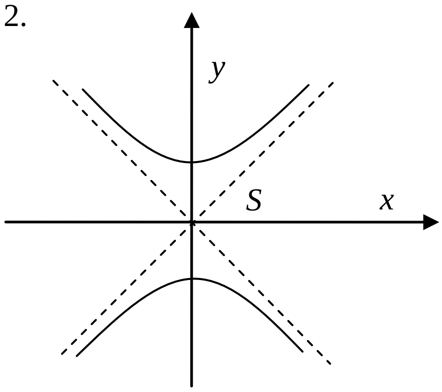
3. $S[x_S; y_S]$ $\quad \frac{(x - x_S)^2}{a^2} - \frac{(y - y_S)^2}{b^2} = 1$

4. $S[x_S; y_S]$ $\quad \frac{(y - y_S)^2}{a^2} - \frac{(x - x_S)^2}{b^2} = 1$

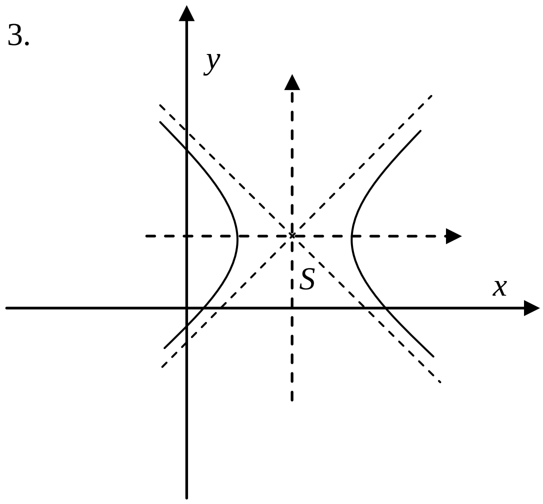
1.



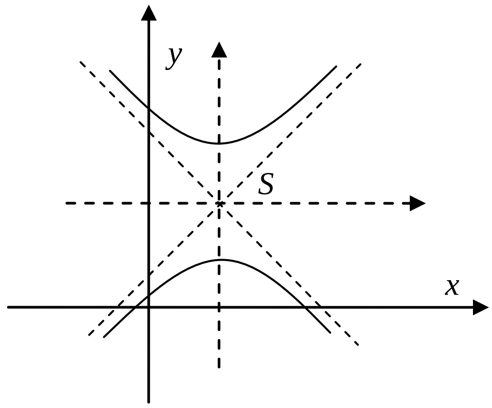
2.



3.



4.



Rovnice tečny hyperboly v bodě dotyku $T[x_0; y_0]$:

ad 1. $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

ad 2. $\frac{yy_0}{a^2} - \frac{xx_0}{b^2} = 1$

ad 3. $\frac{(x - x_S)(x_0 - x_S)}{a^2} - \frac{(y - y_S)(y_0 - y_S)}{b^2} = 1$

ad 4. $\frac{(y - y_S)(y_0 - y_S)}{a^2} - \frac{(x - x_S)(x_0 - x_S)}{b^2} = 1$

1. Zjistěte, jaká kuželosečka je vyjádřena danou rovnicí. Určete její střed, její poloměr nebo poloosy.

   a) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 20 = 0$

   b) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0$

   c) $x^2 - 4y^2 + 6x + 32y - 155 = 0$

   MZLU

   a) kružnice, S[−4; −3], r = 5

   b) elipsa, S[1; 0]; a = 3, b = 2

   c) hyperbola, S[−3; 4]; a = 10, b = 5

2. Napište rovnici hyperboly se středem v počátku soustavy souřadnic, která má hlavní poloosu o velikosti $a = 3$, prochází bodem $A[5; 2]$. Určete také rovnice jejích asymptot.

   VŠE

   $$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1 \quad e = \frac{3}{2}\sqrt{5} \quad a_1 : y = \frac{1}{2}x \quad a_2 : y = -\frac{1}{2}x$$

3. Určete q tak, aby přímka $y = 2x + q$ byla tečnou hyperboly $x^2 - y^2 = 1$. Určete souřadnice dotykového bodu.

   VŠE

   $$q = \pm\sqrt{3} \quad T_1\left[-\frac{2}{3}\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \quad T_2\left[\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

4. Napište rovnici hyperboly se středem v počátku a osami v osách souřadnic, která prochází bodem $M[2; 2]$ a jednou její asymptotou je přímka $2x - y = 0$.

   VŠE

   $$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

5. Zjistěte, jaká křivka je definována následující rovnicí. Určete souřadnice středu této křivky, délky poloos, excentricitu (příp. poloměr).

   a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

   b) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 54y + 49 = 0$

   c) $9x^2 + 25y^2 - 126x + 300y + 1116 = 0$

   d) $x^2 - y^2 - 4x - 6y - 14 = 0$

   e) $4x^2 - y^2 + 2y - 17 = 0$

   VŠE

   a) kružnice, S[2; 1], r = 5

   b) elipsa, S[-1; 3], a = 3 b = 2 e = $\sqrt{5}$

   c) elipsa, S[7; -6], a = 5 b = 3 e = 4

   d) hyperbola S[2; -3], a = 3 b = 3 e = $3\sqrt{2}$

   e) hyperbola S[0; 1], a = 2 b = 4 e = $2\sqrt{5}$

6. Napište rovnici rovnoosé hyperboly se středem v počátku soustavy souřadnic, osami v osách x, y, která prochází bodem $A[-5; 3]$.
VŠE
$x^2 - y^2 = 16$

7. Vypočtěte obsah trojúhelníku, tvořeného asymptotami hyperboly $9x^2 - 4y^2 = 36$ a přímkou o rovnici $x = 6$.
VŠE
$S = 54$

8. Určete délku tětivy, kterou vytíná hyperbola $x^2 - 2y^2 = 4$ na přímce $x - y - 2 = 0$.
VŠE
$d = 4\sqrt{2}$

9. K hyperbole určené danou rovnicí napište rovnici tečny, která prochází bodem A.
a) $x^2 - y^2 = 9 \quad A\left[0; \frac{9}{4}\right]$
b) $x^2 - y^2 = 9 \quad A[1; 1]$
c) $x^2 - y^2 = 1 \quad A[0; 1]$
d) $x^2 - 9y^2 = 9 \quad A[5; 0]$
VŠE
a) $t_1 : 5x - 4y + 9 = 0 \qquad t_2 : 5x + 4y - 9 = 0$
b) $t : y = -\frac{5}{4}x + \frac{9}{4}$
c) $t_1 : x\sqrt{2} + y - 1 = 0 \qquad t_2 : x\sqrt{2} - y + 1 = 0$
d) tečna neexistuje

10. Určete rovnice asymptot hyperboly $4x^2 - 9y^2 - 16x + 54y - 101 = 0$.
VŠE
$a_1 : 2x - 3y + 5 = 0 \qquad a_2 : 2x + 3y - 13 = 0$

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5