DUM č. 14 v sadě

14. Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komlexní čísla

Autor: Magda Krejčová

Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Analytická geometrie v prostoru - sada úloh s výsledky.

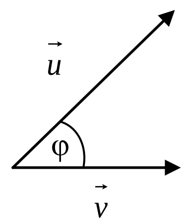
<u>Analytická geometrie v prostoru</u>

Vektory

skalární součin:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\varphi$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$

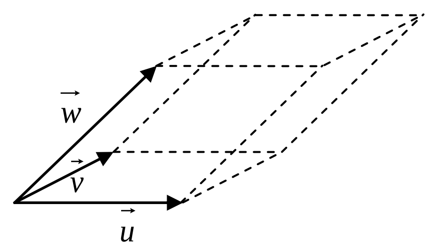


vektorový součin: $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \sin\varphi$

$\vec{u} \times \vec{v}\left(u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2; u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3; u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1\right)$

aplikace vektorového součinu:

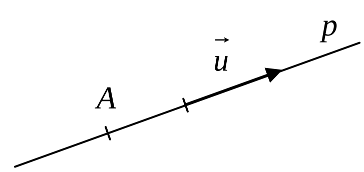
- plocha trojúhelníku: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$
- objem rovnoběžnostěnu: $V = \left|\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w}\right|$



Přímka

jen parametrická rovnice:

$p: X = A + t \cdot \vec{u}$ $\qquad$ $p: \begin{cases} x = x_A + t \cdot \overrightarrow{u_1} \\ y = y_A + t \cdot \overrightarrow{u_2} \\ z = z_A + t \cdot \overrightarrow{u_3} \end{cases} \quad t \in R$



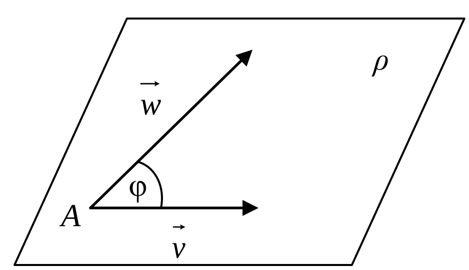
Rovina

obecná rovnice roviny: $\rho: ax + by + cz + d = 0$

(pokud $\vec{u} \perp \rho, \vec{u}(a, b, c)$

parametrická rovnice roviny ρ, rovnoběžné s $\vec{v}$ a $\vec{w}$, $A \in \rho$:

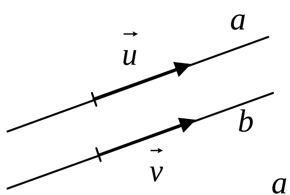
$\rho: A + t\vec{v} + s\vec{w}$ $\qquad$ $\rho: \begin{array}{l} x = x_a + tv_1 + s\vec{w}_1 \\ y = y_a + tv_2 + s\vec{w}_2 \\ z = z_a + tv_3 + s\vec{w}_3 \end{array} \quad t, s \in R$

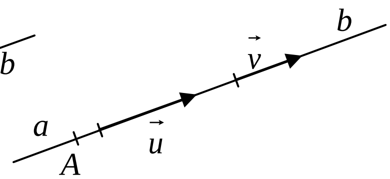


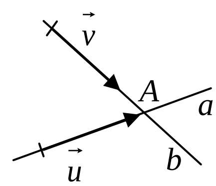
Vzájemná poloha dvou přímek

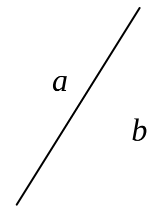
1. rovnoběžné $a \parallel b$ $\qquad$ $\vec{u} = k\vec{v}, k \in R, a \cap b = \{\ \}$
2. totožné $a \equiv b$ $\qquad$ $\vec{u} = k\vec{v}, k \in R, A \in a \wedge A \in b$
3. různoběžné $a \nparallel b$ $\qquad$ $\vec{u} \neq k\vec{v}, k \in R, a \cap b = A$
4. mimoběžné $\qquad$ $\vec{u} \neq k\vec{v}, k \in R, a \cap b = \{\ \}$

1. rovnoběžky 2. totožné přímky 3. různoběžky 4. mimoběžky







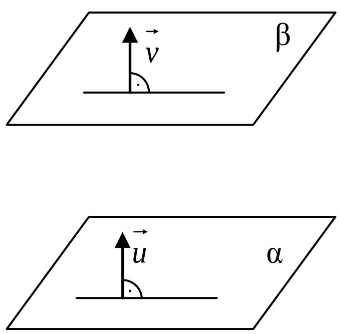


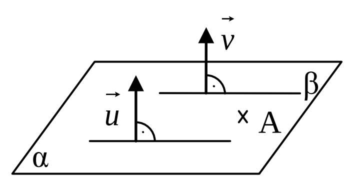
Vzájemná poloha dvou rovin

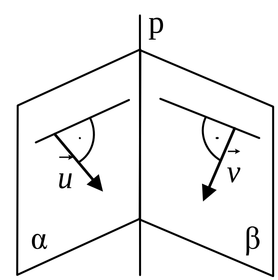
(nejlépe z obecných rovnic rovin a vektorů k nim kolmých)

1. rovnoběžné $\alpha \parallel \beta$ $\vec{u} = k\vec{v},\ k \in R,\ \alpha \cap \beta = \{\ \}$
2. totožné $\alpha \equiv \beta$ $\vec{u} = k\vec{v},\ k \in R,\ A \in \alpha \wedge A \in \beta$
3. různoběžné $\alpha \nparallel \beta$ $\vec{u} \neq k\vec{v},\ k \in R$

1. rovnoběžné roviny 2. totožné 3. různoběžné



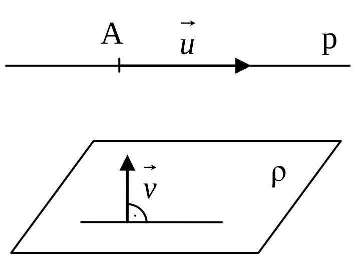


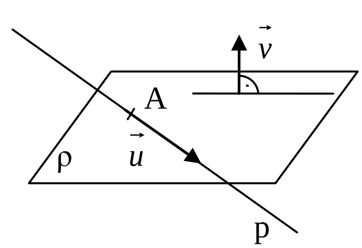


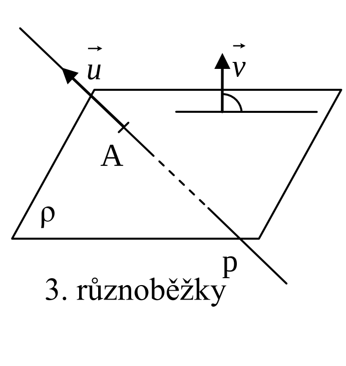
Vzájemná poloha přímky a roviny

(nejlépe pomocí vektoru $\vec{u}$ rovnoběžného s přímkou a vektorem $\vec{v}$ kolmého k rovině)

1. rovnoběžné $p \parallel \rho$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0,\ A \notin \rho$
2. přímka leží v rovině $p \in \rho$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0,\ A \in \rho$
3. různoběžné $p \nparallel \rho$ $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$

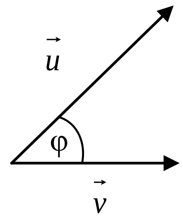






1. přímka rovnoběžná s rovinou 2. přímka leží v rovině 3. různoběžky

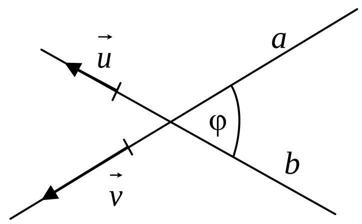
Úhel φ nenulových vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$



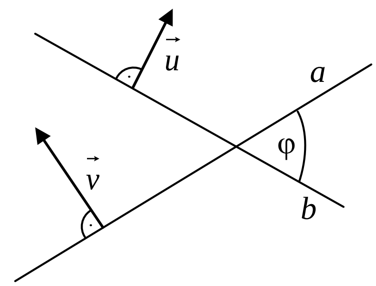
$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$$

Úhel dvou přímek

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$$



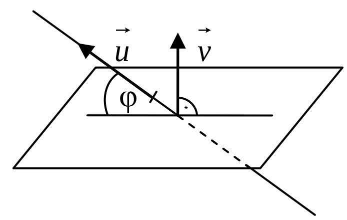
nebo



Úhel φ přímky a roviny

(vektor $\vec{u}$ rovnoběžný s přímkou, vektor $\vec{v}$ kolmý k rovině)

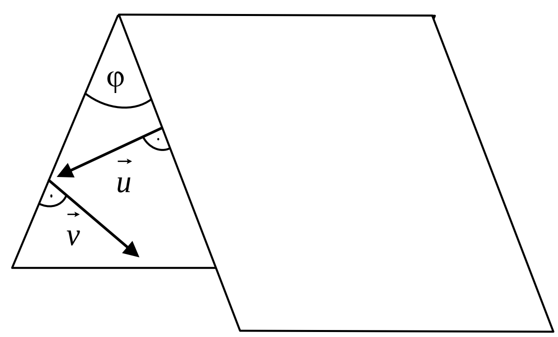
$$\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi = \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$$



Úhel dvou rovin

(vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou kolmé k rovinám)

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$$



Vzdálenost dvou bodů

odpovídá délce úsečky.

$$\left|AB\right| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a) + (z_b - z_a)^2}$$

Vzdálenost bodu A od přímky p

odpovídá vzdálenosti bodu *A* od bodu *P*, který je průsečíkem přímky *p* a k ní kolmé roviny ρ vedené bodem *A*.

$A(x_a; y_a; z_a)$

$\rho : ax + by + cz + d = 0$

$$v(A,\rho) = \frac{\left|ax_a + by_a + cz_a + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vzdálenost bodu *A* od roviny ρ
odpovídá vzdálenosti bodu *A* od paty *p* kolmice vedené bodem *A* k rovině ρ.

Vzdálenost bodu *A* od roviny ρ s ní rovnoběžné
odpovídá vzdálenosti bodu *A* přímky od roviny ρ.

Vzdáleností dvou rovnoběžných rovin
rozumíme vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny.

1. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice vrcholů A, B, C. $A[4;\ 0;\ -1]$, $B[2;\ 4;\ -1]$, $C[5;\ 3;\ 4]$
   $5\sqrt{6}$

2. Vypočítejte obvod, vnitřní úhly a obsah trojúhelníku RST, jsou-li souřadnice vrcholů $R[4;\ 1;\ 0]$, $S[4;\ -2;\ -3]$, $T[1;\ -2;\ 0]$.
   $o = 9\sqrt{2} \quad S = \frac{9}{2}\sqrt{3} \quad \alpha = \beta = \gamma = 60°$

3. Pomocí vektorového součinu vypočítejte obsah rovnoběžníku $KLMN$, jestliže znáte souřadnice K, L, M. Vypočítejte souřadnice vrcholu N.
   $K[1;\ 3]$, $L[2;\ 0]$, $M[4;\ -1]$
   $N[3;\ 2] \quad S = 5$

4. Určete obecnou rovnici roviny $\rho = ABC$. $A[0;\ 2;\ 1]$, $B[3;\ 0;\ 2]$, $C[1;\ 5;\ -4]$.
   $7x + 16y + 11z - 43 = 0$

5. Napište obecnou rovnici roviny, ve které leží přímky p, q.
   $p: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \quad\quad t \in R \\ z = 2 \end{cases} \qquad q: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 8 \quad\quad s \in R \\ z = -3 - s \end{cases}$
   $-x - 3y - z + 16 = 0$

6. Rozhodněte o vzájemné poloze rovin α, β. Pokud jsou různoběžné, určete rovnici průsečnice.
   a) α: $2x - 3y + z - 4 = 0$ $\quad\quad$ β: $-4x + 6y - 2z + 5 = 0$
   b) α: $x + 2y - z + 1 = 0$ $\quad\quad$ β: $4x + y - 5z + 3 = 0$
   a) rovnoběžné
   b) různoběžné, $p: \begin{cases} x = 1 - 9t \\ y = -\frac{1}{3} + t \quad t \in R \\ z = \frac{4}{3} - 7t \end{cases}$

7. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny, případně určete jejich průsečík.
   a) $p: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \quad\quad t \in R \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ $\quad\quad$ ρ: $-x + 2y + z - 1 = 0$
   b) $q: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \quad\quad t \in R \\ z = t \end{cases}$ $\quad\quad$ γ: $x + y - z = 4$

a) $p \in \rho$
b) přímka je různoběžná s rovinou, protíná ji v bodě P[0; 6; 2]

8. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, jestliže jsou dány body, $A[2; -1; 4]$, $B[-3; 1; -1]$, $C[1; 6; -3]$.
   $\alpha \approx 42°23'$ $\beta = 90°$

9. Vypočítejte odchylku dvou rovin:
   $$\rho: \begin{cases} x = 1 - r + 2s \\ y = 2 - 3s \qquad r, s \in R \\ z = 3 + 2r \end{cases} \qquad \sigma \equiv KLM \;\; K[2; 2; 2], L[5; 0; 7], M[4; 5; 1].$$
   $\varphi \approx 85{,}8°$

10. Vypočítejte odchylku α přímky AB a roviny ρ, je-li dáno:
   ρ: $2x - 3y + z + 4 = 0$ a $A[1; 0; 7]$, $B[3; -3; 6]$
   $\alpha \approx 59°$

11. Vypočítejte odchylku dvou přímek:
   $$p: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 - 2t \qquad t \in R \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad q = AB;\ A[3; -2; 2],\ B[7; -2; -1]$$
   $\varphi \approx 48{,}19°$

12. Vypočítejte vzdálenost bodu $M[1; -2; 3]$ od přímky p.
   $$p: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4t \qquad t \in R \\ z = -1 - t \end{cases}$$
   v = 4,9

13. Určete vzdálenost bodu $A[1; 0; 5]$ od roviny ρ, která má rovnici $12x + 3y - 4z = 0$.
   $\frac{8}{13}$

14. Jsou dány roviny α a β:
   $$\alpha: \begin{cases} x = 2s \\ y = 2s \qquad r, s \in R \\ z = 2 - r - s \end{cases} \qquad \beta: \begin{cases} x = 1 - u - 2v \\ y = u \qquad u, v \in R \\ z = v \end{cases}$$
   a) Ověřte, že jsou roviny α a β rovnoběžné.
   b) Určete vzdálenost zadaných rovin.
   b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

15. Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q :
   a) $p = \{[1 + t; 2 - 2t; t]\ t \in R\}$ $\quad q = \{[4 - 2k; 1 + 4k; 3 - 2k]\ k \in R\}$
   b) $p = \{[2 - 3t; 1 + t; 4 - t]\ t \in R\}$ $\quad q = \{[- 4 + 3k; 3 - k; 2 + k]\ k \in R\}$
   c) $p = \{[2t; 3 - t; 4 - t]\ t \in R\}$ $\quad q = \{[2 - 2k; -1 + k; 6 + 2k]\ k \in R\}$
   d) $p = \{[- 6 + t; 7 - t; 2t]\ t \in R\}$ $\quad q = \{[- 5 - k; 3- 2k; 5 + k]\ k \in R\}$
   a) p, q různé rovnoběžky
   b) totožné přímky
   c) mimoběžky
   d) různoběžky

16. Dokažte, že body $A[2; 1; 6]$, $B[0; -1; -6]$, $C[-4; 2; 0]$ určují rovinu a napište její parametrické rovnice.
   a) Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých rovina ABC protíná osu x, y a z.
   b) Rozhodněte, zda body $K[2; 4; 15]$, $L[-3; 2; 6]$ leží v rovině ABC.
   c) Vypočítejte $z \in R$ tak , aby bod $M[-2; 1; z]$ ležel v rovině ABC.
   $\rho \equiv \{[2-t-3k; 1-t+k; 6-6t-6k]\, t, k \in R\}$
   a) $P_x[1;0;0] \quad P_y[0;1;0] \quad P_z[0;0;-3]$
   b) $K \in \rho,\ L \notin \rho$
   c) $z = - 6$

17. Dokažte, že přímky p, q určují rovinu. Napište její obecnou rovnici.
   $p = \{[1 - t; 2 + t; 3 + 2t]\ t \in R\}$, $q = \{[k; 1 - k; 1 - 2k]\ k \in R\}$.
   $2y - z - 1 = 0$

18. Napište obecnou rovnici roviny ρ, ve které leží body $A[2; 3; 0]$, $B[1; 2; 2]$ a rovina ρ je kolmá k rovině α: $3x - 2y + z + 6 = 0$.
   ρ: $x + 3y + 3z - 11 = 0$

19. Vyšetřete vzájemnou polohu rovin ρ a σ:
   $\rho = \{[3 + t - k; 5 + t; -t + 2k]\ t, k \in R\}$ $\qquad \sigma = \{[3 + s - 4p, 6 + 2s - 3p, 1 + 5p]\ s, p \in R\}$
   totožné roviny

20. Určete hodnoty parametrů $a, b \in R$ tak, aby roviny ρ: $x + by + z - 7 = 0$ a σ: $ax + 4y - z + 3 = 0$ byly
   a) rovnoběžné
   b) různoběžné
   c) navzájem kolmé
   a) $a = -1,\ b = -4$
   b) $a \neq -1 \vee b \neq -4$
   c) $\rho \perp \sigma \Leftrightarrow a = 1 - 4b$

21. V trojúhelníku ABC vypočítejte délku výšku v_a, znáte-li $A[1; 2; 3]$, $B[3; 6; 2]$, $C[-1; 10; -2]$.
   $3\sqrt{2}$

22. Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných přímek $p = \{[1 - t;\ 1 + 2t;\ - t]\ t \in R\}$ a
$q = \{[2 + k;\ 1 - 2k;\ 2 + k]\ k \in R\}$

$\frac{1}{2}\sqrt{14}$

23. Na přímce $p = \{[k;\ 3 + k;\ 2 + 4k]\ k \in R\}$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od roviny ρ: $2x + y - z + 12 = 0$ byla $2\sqrt{6}$.

$M_1[1; 4; 6]$ $M_2[25; 28; 102]$

24. Je dán bod $A[-1;\ 4;\ -2]$. Na ose y určete bod M tak, aby platilo $|AM| = 3$.

$Y_1[0; 6; 0]$ $Y_2[0; 2; 0]$

25. Rovina vzdálená 2 jednotky délky od roviny $3y + 4z = 16$ má rovnici (vyberte odpověď):
a) $3y + 4z = 14$
b) $3y + 4z = 12$
c) $3y + 4z = 10$
d) $3y + 4z = 8$
e) $3y + 4z = 6$

FE VUT

e)

26. Odchylka roviny $x = 3t + 3s;\ y = -t - s;\ z = 2t - 5s$ od roviny $2x + y - \sqrt{5}z + 9 = 0$ je rovna (vyberte odpověď):
a) π
b) $\frac{\pi}{2}$
c) $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{4}$
e) $\frac{\pi}{3}$

FE VUT

e)

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5