DUM č. 15 v sadě

14. Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komlexní čísla

Autor: Magda Krejčová

Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Komplexní čísla: tvary, operace s komplexními čísly, Gaussova rovina, vyjádření množin bodů pomocí komplexních čísel - sada příkladů s výsledky.

Komplexní čísla: tvary, operace s komplexními čísly, Gaussova rovina, vyjádření množin bodů pomocí komplexních čísel

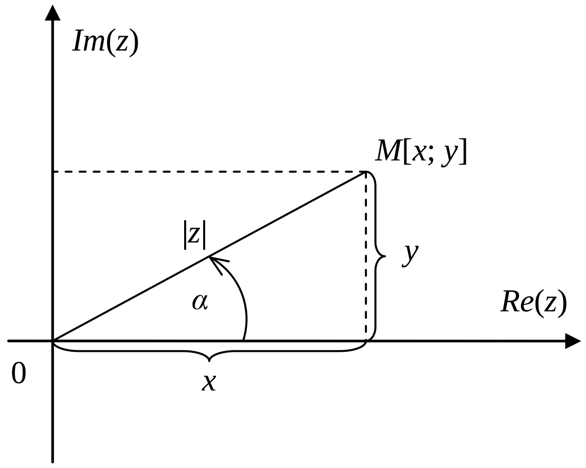
Komplexními čísly (prvky v oboru ***C***) nazýváme výrazy typu $x + yi$, přičemž *x*, *y* jsou reálná čísla. *x* je reálná část *Re*(*z*), *y* je imaginární část *Im*(*z*) komplexního čísla, *i* je imaginární jednotka ($i^2 = -1$).

algebraický tvar komplexního čísla $z = x + yi$

Když $y = 0$, pak $z = x$ je reálné číslo.

Když $x = 0$, pak $z = yi$ je ryze imaginární číslo.

Komplexní číslo znázorňujeme jako bod o souřadnicích $[x; y]$ v rovině komplexních čísel (Gaussova rovina).



$$\cos\alpha = \frac{x}{|z|}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{|z|}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \arg(z)$$

α ... argument komplexního čísla

goniometrický tvar komplexního čísla $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

komplexní sdružené číslo k číslu $z = x + yi$ je číslo $\bar{z} = x - yi$

rovnost komplexních čísel z_1 a z_2: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

sčítání komplexních čísel: $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i$

odčítání komplexních čísel: $(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i$

násobení komplexních čísel: $(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 y_1)i$

dělení komplexních čísel:

$$\frac{(x_1 + y_1 i)}{(x_2 + y_2 i)} = \frac{(x_1 + y_1 i)}{(x_2 + y_2 i)} \cdot \frac{(x_1 - y_1 i)}{(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + (x_2 \cdot y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}$$

násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \cdot |z_2|(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) = |z_1| \cdot |z_2| [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)}{|z_2|(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

1. Vypočítejte reálná čísla x, y tak, aby platilo:
$4x(2+i)+y(1-4i)+7=x(3+i)-6y(-1+2i)+9i$
VŠE
$x=-\frac{1}{5},\ y=\frac{6}{5}$

2. Číslo $(2 + i + 3i^2 - i^3 - i^4 + 5i^5)\cdot(i - i^2 + 3i^3 - 5i^4)$ vyjádřete v algebraickém tvaru.
VŠE
22 - 24i

3. Číslo $\frac{5-4i}{3+2i}$ vyjádřete v algebraickém tvaru.
VŠE
$\frac{7}{13}-\frac{22}{13}i$

4. Najděte číslo komplexně sdružené k číslu $z = 2i - 3i\ (1 + 2i)^2 - 4\ (2 - 4i)$.
VŠE
$\bar{z} = 4 - 27i$

5. Určete absolutní hodnotu čísla z = $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$
VŠE
$\sqrt{2}$

6. Vypočítejte všechna komplexní čísla $z = a + bi$, pro které platí $|z|=\sqrt{2}$, $a = b$.
VŠE
$1 + i$, $-1 - i$

7. Vypočítejte reálná čísla x, y tak, aby platilo:
a) $(4 - i)^4 = x - 4yi + 2$
b) $(2 + i)^2(-1 + i) = x - 2yi$
c) $\frac{(1-i)^3-1}{(1+i)^3+1}= x - 4yi - 1$
VŠE
a) $x = 159,\ y = 60$
b) $x = -7,\ y=\frac{1}{2}$
c) $x=\frac{4}{5},\ y=-\frac{2}{5}$

8. Vypočítejte všechna komplexní čísla $z = a + bi$ (kde je a reálná a b imaginární část čísla z), pro která platí:
a) $|z|=3 \qquad |a|=\sqrt{3}\cdot|b|$

b) $|z| = 4$ $\qquad |a| = |b|$

VŠE

a) $z_{1,2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$, $z_{3,4} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$

b) $z_{1,2} = 2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}\,i$, $z_{3,4} = -2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}\,i$

9. Vypočítejte:
   a) $(2 - i^2)(1 + i^3)(3 + 4i^5) - (2 + \sqrt{2}\,i^2)(2 - \sqrt{2}\,i^2)(3 - 2i^6)$
   b) $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^3 - \left(\frac{2-i}{2+i}\right)^3$
   c) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$
   d) $(2 - i)(2 + i) + (3 + 2i)^2 + 4(4 - i)(4 + i)$
   VŠE
   a) 11 + 3i
   b) $\frac{88}{125}i$
   c) 1
   d) 83

10. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla:
   a) $(3 + 2i)i^6 - (-1 + 3i)^2$
   b) $\frac{2+4i}{1+i}(2 - i)$
   c) $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$
   VŠE
   a) $a = 5$, $b = 4$
   b) $a = 7$, $b = -1$
   c) $a = 0$, $b = 2$

11. Vypočítejte absolutní hodnotu komplexního čísla:
   a) $(1 - 2i)(2 + 4i) - (3 + i)^2$
   b) $-i^3(2 - i) + (-3 + 2i)^2$
   c) $\frac{1-2i}{2+i}(-2 + i)$
   VŠE
   a) $2\sqrt{10}$
   b) $2\sqrt{34}$
   c) $\sqrt{5}$

12. Napište číslo $z = 1 - i$ v goniometrickém tvaru.
   VŠE
   $z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$

13. Vynásobte komplexní číslo $z_1 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi)$ a $z_2 = 2\sqrt{2}\,(\cos\pi + i\sin\pi)$.

VŠE

$z_1 \cdot z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

14. Vypočtěte a získané komplexní číslo zapište v algebraickém tvaru:

a) $\frac{1+i}{1-2i} - \frac{i}{1+i}$

b) $\frac{15-5i}{1+2i} - \frac{1-3i}{i}$

c) $\frac{2+i}{3-i} + (i-2)(4-i)$

d) $\frac{2+4i}{1+i}(2-i)$

e) $\frac{i+1}{i} : \frac{i-1}{2i+3}$

f) $\left(\frac{i-1}{i} + \frac{i}{i-1}\right)\cdot(2i-3)$

g) $\frac{2-4i}{1+i} + (1+2i)^2 \cdot i^7$

h) $\frac{1-3i}{2+i} + \frac{1+3i}{2-i} \cdot i^9$

i) $\frac{(1-i)^2(\sqrt{3}+i)}{1-i\sqrt{3}} + i^{19}$

j) $\frac{1}{6}(3 - i\sqrt{2})^2 - (3 + i\sqrt{2})^2 \cdot i^{18}$

MZLU

a) $\frac{-7+i}{10}$

b) $4-6i$

c) $-\frac{13}{2} + \frac{13}{2}i$

d) $7 - i$

e) $-3 - 2i$

f) $\frac{-11+3i}{2}$

g) 3

h) $\frac{-8-8i}{5}$

i) $2-i$

j) $\frac{49}{6} + 5i\sqrt{2}$

15. Určete součin $z_1 \cdot z_2$ a podíl $\frac{z_1}{z_2}$ a výsledky zapište v algebraickém tvaru:

$z_1 = 6(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi)$ $\qquad$ $z_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$z_1 \cdot z_2 = -3i$, $\frac{z_1}{z_2} = -6\sqrt{3} - 6i$

16. Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí:

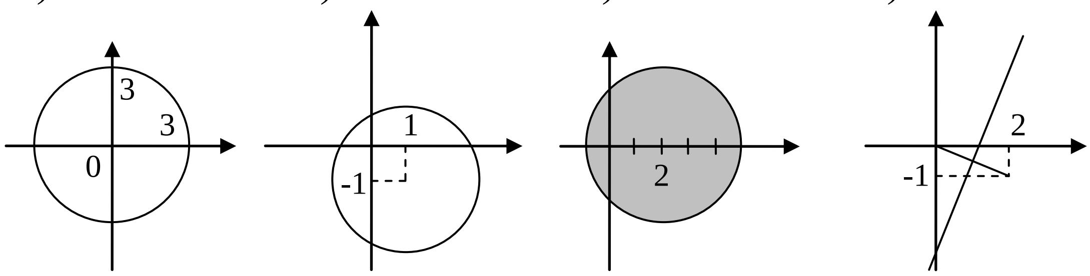
a) $|z| = 3$

b) $|z - 1 + i| = 2$

c) $|z - 2| \leq 3$

d) $|z| = |z - 2 + i|$

a) *b)* *c)* *d)*



17. Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru:

a) $\frac{i-3}{2+i}$

b) $\frac{i-2}{4i-8}$

a) $\sqrt{2}\,(\cos 135° + i\sin 135°)$

b) $0{,}25(\cos 0 + i\sin 0)$

18. Převeďte na algebraický tvar:

a) $z_1 = 4(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)$

b) $z_2 = \cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi$

c) $z_3 = 5(\cos 11\pi + i\sin 11\pi)$

d) $z_4 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{105}{4}\pi + i\sin\frac{105}{4}\pi)$

a) $z_1 = -2\sqrt{3} - 2i$

b) $z_2 = i$

c) $z_3 = -5$

d) $z_4 = 1 + i$

19. Převeďte na goniometrický tvar následující komplexní čísla:

a) $z_1 = 1 + i$

b) $z_2 = 3$

c) $z_3 = 5i$

d) $z_4 = -2 + 2i\sqrt{3}$

e) $z_5 = -\sqrt{3} + i$

f) $z_6 = 10 - 10i$

g) $z_7 = -7 - 7i$

h) $z_8 = \sin 30° + i \cos 30°$

a) $z_1 = \sqrt{2}\,(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi)$

b) $z_2 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$

c) $z_3 = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

d) $z_4 = 4(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$

e) $z_5 = 2(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi)$

f) $z_6 = 10\sqrt{2}\,(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$

g) $z_7 = 7\sqrt{2}\,(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi)$

h) $z_8 = 1(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi)$

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5