DUM č. 16 v sadě

14. Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komlexní čísla

Autor: Magda Krejčová

Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Komplexní čísla: lineární, kvadratická rovnice s reálnými koeficienty, soustavy lineárních rovnic, Moivreova věta - sada úloh s výsledky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Komplexní čísla: lineární, kvadratická rovnice s reálnými koeficienty, soustavy lineárních rovnic, Moivreova věta

Lineární rovnice se řeší analogicky jako v $\boldsymbol{R}$, výsledek je nutno převést do algebraického tvaru. V případě, že rovnice (nerovnice) obsahuje z i $\bar{z}$, nahradíme z výrazem $x+yi$, $\bar{z}$ výrazem $x-yi$.

Rovnost komplexních čísel z_1 a z_2: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

Kvadratická rovnice $az^2 + bz + c = 0$ mají pro ($\Delta = b^2 - 4ac$):

$\Delta > 0$ dva různé reálné kořeny $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0$ jeden reálný kořen (dvojnásobný) $z = \dfrac{-b}{2a}$

$\Delta < 0$ dva komplexně sdružené kořeny $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}i}{2a}$

Moivreova věta: Nechť $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ je libovolné nenulové komplexní číslo, $n \in N$.

Pak n-tá mocnina čísla je dána vzorcem: $z^n = |z|^2(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

1. Vyřešte rovnici v oboru komplexních čísel:

a) $3x^2 + 2x + 3 = 0$
b) $2x^2 - 9x + 17 = 0$
c) $3x^2 + 8x + 11 = 0$
d) $3x^2 - 12x + 13 = 0$
e) $4x^2 - 16x + 17 = 0$
f) $4x^2 - 8\sqrt{2}\,x + 9 = 0$
g) $9x^2 - 6x + 19 = 0$
h) $4x^2 - 12x + 17 = 0$
i) $5x^2 + 4x + 8 = 0$
j) $9x^2 - 6x + 10 = 0$

MZLU

a) $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 2\sqrt{2}i}{3}$

b) $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{55}i}{4}$

c) $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{17}i}{3}$

d) $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{3}i}{3}$

e) $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm i}{2}$

f) $x_{1,2} = \dfrac{2\sqrt{2} \pm i}{2}$

g) $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3\sqrt{2}i}{3}$

h) $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}i}{2}$

i) $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 6i}{5}$

j) $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3i}{3}$

2. Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejichž jeden kořen je komplexní číslo x_1.

a) $x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $x_1 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $x_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $x_1 = -\dfrac{1}{2} - i$

e) $x_1 = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

f) $x_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

MZLU
a) $x^2 - x + 1 = 0$
b) $x^2 - 5x + 7 = 0$
c) $x^2 - 3x + 3 = 0$
d) $x^2 + x + \frac{5}{4} = 0$
e) $x^2 + 4x + \frac{9}{2} = 0$
f) $x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0$

3. Vyřešte rovnici v oboru komplexních čísel:
a) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
b) $x^3 + 8x^2 + 15x = 0$
c) $x^3 - x^2 - 6x = 0$
d) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$
e) $x^3 - 6x^2 + x - 6 = 0$
f) $x^3 - 4x^2 - 2x + 8 = 0$
g) $x^3 - 5x^2 + 3x - 15 = 0$
h) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$
MZLU
a) 2, 3, 0
b) −5, −3, 0
c) 3, −2, 0
d) 3, −1, 0
e) i, −i, 6
f) 4, $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$
g) 5, $\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i$
) −3, −2, 2

4. Vypočítejte reálná čísla *x, y* tak, aby platilo:
a) $(4 - i)^4 = x - 4yi + 2$
b) $(2 + i)^2 (-1 + i) = x - 2yi$
c) $\frac{(1-i)^3 - 1}{(1+i)^3 + 1} = x - 4yi - 1$
VŠE
a) x = 159; y = 60
b) x = −7; y = 0,5
c) x = 0,8; y = − 0,4

5. Určete všechny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ (*a*, *b*, *c* jsou reálná čísla, $a \neq 0$), jejichž jedním kořenem je komplexní číslo $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$.

VŠE
$k\cdot(x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 4) = 0;\ k \in R - \{0\}$

6. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla z^5, je-li:
   a) $z = 3 + 3i$
   b) $z = -1 - i$
   c) $z = 4\sqrt{3} + 4i$
   VŠE
   a) $a = -972;\ b = -972$
   b) $a = 4;\ b = 4$
   c) $a = -4^7\sqrt{3},\ b = 4^7$

7. Pomocí Moivreovy věty vypočítejte:
   a) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8$
   b) $(1 + i)^{10}$
   c) $(-2 + 2i)^{12}$
   VŠE
   a) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
   b) $32i$
   c) -2^{18}

8. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla:
   a) $(2 + 2i)^{30}$
   b) $(-1 + i)^{34}$
   c) $(\sqrt{3} - i)^{30}$
   d) $(1 - i\sqrt{3})^{27}$
   VŠE
   a) $a = 0,\ b = -2^{45}$
   b) $a = 0,\ b = -2^{17}$
   c) $a = -2^{30},\ b = 0$
   d) $a = -2^{27},\ b = 0$

9. V množině všech komplexních řešte kvadratickou rovnici a řešení uveďte v goniometrickém tvaru:
   a) $x^2 + 2x + 2 = 0$
   b) $x^2 - 2x + 2 = 0$
   c) $x^2 + 2x + 4 = 0$
   d) $x^2 - 2x + 4 = 0$
   e) $x^2 - 4x + 8 = 0$
   f) $x^2 + 4x + 16 = 0$
   VŠE
   a) $x_1 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi),\ x_2 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi)$
   b) $x_1 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi),\ x_2 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$

c) $x_1 = 2(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi),\ x_2 = 2(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi)$

d) $x_1 = 2(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi),\ x_2 = 2(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi)$

e) $x_1 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi),\ x_2 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$

f) $x_1 = 4(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi),\ x_2 = 4(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi)$

10. Zjistěte, zda čísla x a y jsou řešením dané soustavy rovnic:

a) $x = 3 + 2\sqrt{2}\,i,\ y = -2 - \sqrt{2}\,i$
$x^2 + y^2 - 4x + 8y = -25$
$x + 2y = -1$

b) $x = 5 - 2\sqrt{3}\,i,\ y = 1 + 3\sqrt{3}\,i$
$x^2 + y^2 - 2x - 6y = 29$
$3x + 2y = 17$

VŠE
a) ano
b) ne

11. Vyjádřete $\sin 3x$ jako funkci $\sin x$ a funkci $\cos 3x$ vyjádřete jako $\cos x$.
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

12. Napište kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejíž jeden kořen je:

a) $x_1 = -4 - i$
b) $x_1 = -2 + 6i$
c) $x_1 = -1 - \sqrt{2}\,i$

VŠE
a) $x^2 + 8x + 17 = 0$
b) $x^2 + 4x + 40 = 0$
c) $x^2 + 2x + 3 = 0$

13. Řešte rovnice s neznámou $z \in \mathrm{C}$:

a) $2z + 3\bar{z} = 5 + i$
b) $\left(2 - \frac{1}{i}\right)\bar{z} - 13 = 2(6{,}5i - z)$
c) $z \cdot \bar{z} - z = \overline{6 - 2i}$
d) $z(\bar{z} - 4) - 1 = 8i$

a) $1 - i$
b) $13 - 39i$
c) $-1 - 2i;\ 2 - 2i$
d) $1 - 2i,\ 3 - 2i$

14. Řešte rovnice s neznámou $z \in \mathrm{C}$:

a) $z = 3i(z - i) - 5z$
b) $\frac{z}{1 - i} + \frac{z + 2}{i} = \frac{5}{2i - 1}$

c) $(z + i)(z - 3i) = z(z - i)$

d) $i - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 1 - \frac{1}{z}$

a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

b) $-1 - i$

c) $-3i$

d) i

15. Řešte rovnice s neznámou $z \in C$:

a) $|z| = 1 + 2i + z$

b) $|z+1| - 4i = z + 3$

a) $z = \frac{3}{2} - 2i$

b) $z = 2 - 4i$

16. Řešte soustavy rovnic v C:

a) $2z_1 + z_2 = 8i$

$z_1 - z_2 = 6 + i$

b) $(1 + i)z_1 - 3z_2 = -7 - 6i$

$2z_1 + (2 + i)z_2 = 6 + 5i$

a) $z_1 = 2 + 3i; \quad z_2 = -4 + 2i$

b) $z_1 = 1 - i; \quad z_2 = 3 + 2i$

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5