DUM č. 17 v sadě

14. Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komlexní čísla

Autor: Magda Krejčová

Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Komplexní čísla: kvadratické rovnice s komplexními koeficienty, binomická rovnice, polynomy vyšších stupňů v C - sada příkladů s výsledky.

Komplexní čísla: kvadratické rovnice s komplexními koeficienty, binomická rovnice, polynomy vyšších stupňů v C

Kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty řešíme podle vzorce

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a};\ \Delta = b^2 - 4ac$$

Pokud hodnota diskriminantu je rovna komplexnímu číslu s nenulovou imaginarní částí, je odmocninou diskriminantu komplexní číslo.

Postup řešení:

$$\sqrt{\Delta} = a + bi\ /^2$$

$$\Delta = a^2 + 2abi - b^2$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}(\Delta) &= a^2 - b^2 \\ \mathrm{Im}(\Delta) &= 2ab \end{aligned}\right\} \rightarrow a, b \rightarrow z_{1,2}$$

Binomická rovnice je rovnice typu $z^n - a = 0,\ n \in N,\ a \in C$

Postup řešení: $z^n = a$

$$\left[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$|z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad /\, Moivreova\ v.$$

Z rovnosti komplexních čísel plyne:

$$|z|^n = |a| \Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|}$$

$$n\varphi = \alpha + 2k\pi \quad k \in Z$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

Binomická rovnice $z^n - a = 0$ má n řešení. Dostaneme je dosazením $k = 0$, $k = 1 \ldots K = n - 1$ do výrazu pro φ.

Z výrazu pro argument plyne, že všechna řešení binomické rovnice mají stejnou absolutní hodnotu $|z| = \sqrt[n]{|a|}$ a různé argumenty, lišící se o násobek $\frac{2\pi}{n}$. To znamená, že obrazy komplexních čísel, která jsou řešením binomické rovnice (tedy n-té odmocniny z čísla a), jsou vrcholy pravidelného n-úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku a s poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$.

Hledání kořenů polymů vyšších stupňů v ***C*** - Hörnerova metoda

1. Řešte následující rovnice s neznámou $z \in C$:
   a) $z^2 + (2+i)z - 1 + 7i = 0$
   b) $z^2 - 2iz - 5 = 0$
   c) $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$
   d) $z^2 - 4iz - 3 = 0$
   e) $z^2 + 2z + 2i + 1 = 0$
   f) $z^2 + 2iz = 1 + 2i$
   g) $z^2 - 4iz - 8 = 0$
   h) $z^2 - 6iz - 12 = 0$
   i) $z^2 - 6iz - 9 = 0$
   j) $z^2 + z(2-i) + 3 - i = 0$
   k) $iz^2 - 3z + 4i = 0$
   l) $z^2 + (i-3)z + 2 - 2{,}5i = 0$
   m) $(7+i)z^2 - 5iz - 1 = 0$
   n) $z(3-z) = 3 - i$
   o) $z^2 - 20 = iz(2i - z)$
   a) $-3+i; 1-2i$
   b) $2+i; -2+i$
   c) $1-i; 2+3i$
   d) $i; 3i$
   e) $-2+i; -i$
   f) $1; -1-2i$
   g) $2+2i; -2+2i$
   h) $\sqrt{3}+3i; -\sqrt{3}+3i$
   i) $3i$
   j) $-1+2i; -1-i$
   k) $-4i; i$
   l) $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   n) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i; -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$
   m) $2+i; 1-i$
   o) $3-i; -4+2i$

2. Najděte komplexní číslo, které je rovno $\sqrt{7-24i}$.
   $-4+3i; 4-3i$

3. V rovnici $z^2 + 2(3-2i)z + k = 0$ určete $k \in C$ tak, aby rovnice měla dvojnásobný kořen.
   $k = 5 - 12i; z = -3 + 2i$

4. Řešte následující rovnice s proměnnou $z \in C$, znáte-li jeden kořen z_1.
   a) $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0 \quad z_1 = 1$

b) $z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = 0 \quad z_1 = 2i$

c) $z^3 + (-3-2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i = 0 \quad z_1 = i$

d) $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0 \quad z_1 = -2$

a) $1; -1+\sqrt{3}i; -1-\sqrt{3}i$

b) $2i; \sqrt{3}+i; \sqrt{3}-i$

c) $i; 1; 2+i$

d) $-2; -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

5. V množině komplexních čísel řešte následující rovnice. Obrazy nalezených kořenů vyneste do komplexní roviny. Jaký geometrický útvar jste získali?

a) $2z^4 + 32 = 0$

b) $27z^3 + 125 = 0$

c) $z^4 + 1 = 0$

d) $32z^5 - 1 = 0$

e) $z^3 + 1 = 0$

f) $z^3 - 8i = 0$

g) $z^5 - 1 = 0$

h) $z^3 + 2 - 2i = 0$

a) $z_0 = \sqrt{2}+i\sqrt{2} \quad z_1 = -\sqrt{2}+i\sqrt{2} \quad z_2 = -\sqrt{2}-i\sqrt{2} \quad z_3 = \sqrt{2}-i\sqrt{2}$ *čtverec*

b) $z_0 = \frac{5}{6}+\frac{5\sqrt{3}}{6}i \quad z_1 = -\frac{5}{3} \quad z_2 = \frac{5}{6}-\frac{5\sqrt{3}}{6}i$ *rovnostranný trojúhelník*

c) $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \quad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ *čtverec*

d) $z_0 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right) \quad z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right) \quad z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$

$z_3 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right) \quad z_4 = \frac{1}{2}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$ *pravidelný pětiúhelník*

e) $z_0 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_1 = -i \quad z_2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ *rovnostranný trojúhelník*

f) $z_0 = \sqrt{3}+i \quad z_1 = -\sqrt{3}+i \quad z_2 = -2i$ *rovnostranný trojúhelník*

g) $z_0 = (\cos 0 + i\sin 0) \quad z_1 = \left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right) \quad z_2 = \left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$

$z_3 = \left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right) \quad z_4 = \left(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right)$ *pravidelný pětiúhelník*

h) $z_0 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad z_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

$z_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$ *rovnostranný trojúhelník*

6. Řešte rovnice s neznámou v . Výsledky zapište v goniometrickém tvaru. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

a) $z^3 - 1 - i = 0$

b) $z^6 - 1 - +i\sqrt{3} = 0$

c) $(iz)^4 + \sqrt{3} - i = 0$

d) $(2z)^5 - 16 = 16i\sqrt{3}$

a) $z_{1,2,3} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] k \in \{0,1,2\}$

b) $z_{1,2,3,4,5,6} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\right)\right] k \in \{0,1,2,3,4,5\}$

c) $z_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right)\right] k \in \{0,1,2,3\}$

d) $z_{1,2,3,4,5} = 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right] k \in \{0,1,2,3,4\}$

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5