DUM č. 18 v sadě

14. Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komlexní čísla

Autor: Magda Krejčová

Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Matematická analýza: limita funkce - sada úloh s výsledky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematická analýza: limita funkce

Definice limity funkce v bodě $x_0 \in R$

Říkáme, že funkce *f* má v bodě x_0 limitu *l*, právě když platí :

1. Funkce *f* je definovaná v nějakém okolí bodu x_0, popřípadě s výjimkou bodu x_0 samotného.

2. K libovolnému (libovolně malému) ε > 0 existuje δ > 0 tak, že pro všechna $x \in D_f; x \neq x_0$, pro něž je $|x - x_0| < \delta$, platí $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Věty o limitách funkcí

V1: Funkce *f* má v daném bodě x_0 nejvýše jednu limitu.

V2: Je-li *f* konstantní funkce, tj. $f(x) = c$ pro každé $x \in R$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ pro každé $x_0 \in R$.

V3: Mají-li funkce *f, g* v bodě x_0 limity, pak mají v tomto bodě limitu i funkce $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$ kde $c \in R$ je konstanta, a je-li $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, také funkce $\frac{f}{g}$ a platí:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

d) $\lim\limits_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$

L'Hospitalovo pravidlo

Nechť funkce *f, g* mají v bodě $x_0 \in R$ funkční hodnoty $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (nebo $+\infty$ nebo $-\infty$) a nechť existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Potom existuje také $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

V4: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

1. Vypočítejte uvedené limity

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{2x}$

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2+1}+\frac{x}{\sin 4x}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}$

j) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$

k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x-\sin 2x+1}{\cos x-\sin x}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+9}-3}$

m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{tg^2 x-1}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}x-2-4\ln x$

o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-1}{x^2}$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\ln x}{x^2}$

q) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{1-x}$

r) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1-x}{(2-x)^2}$

s) $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{2}{x^2+4x}$

Řešení:

a) 1

b) $-\sqrt{3}$

c) $-\frac{1}{6}$

d) 2

e) $\frac{1}{8}$

k) $\sqrt{2}$

l) 3

m) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

n) $+\infty$

o) $-\infty$

f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\frac{1}{3}$

h) $\frac{13}{4}$

i) $-4\sqrt{2}$

j) $\frac{3}{4}$

p) $-\infty$

q) neexistuje

r) $-\infty$

s) $-\infty$

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5