DUM č. 20 v sadě

14. Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komlexní čísla

Autor: Magda Krejčová

Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Matematická analýza: primitivní funkce, neurčitý integrál a jeho aplikace - sada úloh s výsledky.

Matematická analýza: primitivní funkce, neurčitý integrál a jeho aplikace

Primitivní funkce

Definice: Nechť f je funkce, jejíž definiční obor obsahuje interval $(a;b)$. Funkce se nazývá primitivní funkce k funkci f na intervalu $(a;b)$, právě když platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a;b)$.

Značení: $F(x) = \int f(x)dx$. Funkce primitivní se také nazývá neurčitý integrál.

V1: Každé dvě primitivní funkce F, G k funkci f na intervalu $(a;b)$ se liší o reálnou konstantu c, to je $G(x) = F(x) + c$.

c ... integrační konstanta

f … integrovaná funkce

x … integrační proměnná

V2: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $(a;b)$. Pak k ní na $(a;b)$ existuje primitivní funkce.

V3: Nechť k funkci f a g existují neurčité integrály na $(a;b)$, $k \in R$. Pak

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$
$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Vzorec pro neurčitý integrál		**Podmínky platnosti vzorce**
$\int 0dx = c$		$x \in (-\infty;+\infty)$
$\int 1dx = x + c$		$x \in (-\infty;+\infty)$
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$n \in N$	$x \in (-\infty;+\infty)$
$\int x^k dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + c$	$k \in \mathbb{Z}, k \neq -1$	$x \in (-\infty;+\infty)$ pro $k > 0$
$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$	$r \in \mathbb{R}, r \neq -1$	$x \in (-\infty;+\infty) \cup (0;+\infty)$ pro $k > 0$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$		$x \in (-\infty;+\infty)$
$\int e^x dx = e^x + c$		$x \in (-\infty;+\infty)$

$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$	$a > 0,\ a \neq 1$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$		$x \in (-\infty; +\infty)$
$\int \cos x dx = \sin x + c$		$x \in (-\infty; +\infty)$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$		$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) + k\pi; k \in Z$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -cotgx + c$		$x \in (0; \pi) + k\pi; k \in Z$

Integrační metody:

Metoda per partes: $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$

Metoda substituce: $\int f[g(x)] \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt$ kde $t = g(x)$

1. Vypočítejte:

a) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

b) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$

c) $\int 5^{2x} dx$

d) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

e) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx$

f) $\int \frac{3 - 2\cot g^2 x}{\cos^2 x} dx$

g) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

h) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

i) $\int \frac{2x}{x^2-1}dx$ substituční metoda

j) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx$

k) $\int \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}} \right)^2 dx$

Řešení:

a) $x - 2\ln x - \frac{1}{x} + c$

b) $\frac{2x^2}{5}\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c$

c) $\frac{25^x}{\ln 25} + c$

d) $x - \frac{\cos 2x}{2} + c$

e) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + c$

f) $3tgx + 2\cot gx + c$

g) $tgx - x + c$

h) $x + \cos x + c$

i) $\ln\left(x^2 - 1\right) + c$

j) $-\cot gx - tgx + c$

k) $e^x + 2x - e^{-x} + c$

2. Užitím metody "per partes" vypočítejte:

a) $\int xe^x dx$

b) $\int x \sin x dx$

c) $\int x \ln x dx$

Řešení:

a) $(x-1)e^x + c$

b) $\sin x - x\cos x + c$

c) $\dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + c$

Určitý integrál

Definice: Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu J. Rozdíl $F(b)$ - $F(a)$ funkčních hodnot funkce F v libovolných bodech a, b tohoto intervalu se nazývá určitý integrál funkce f v mezích od a do b a označuje se $\int_a^b f(x)dx$. Platí tedy $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

V1: Nechť f a g jsou spojité funkce v intervalu J, a, b nechť jsou libovolné body z J a c libovolná reálná konstanta. Pak platí:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

V2: Je-li funkce f spojitá na intervalu J, který obsahuje body a, b, c, pak platí:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

V3: Při záměně mezí určitého integrálu se mění znaménko určitého integrálu:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Integrační metody:

Metoda per partes: $\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx$

Metoda substituce: $\int_a^b f[g(x)] \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$

3. Vypočítejte:
   a) $\int_{-1}^{2} (x^2 - x + 5)dx$

   b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx$

   c) $\int_0^1 e^{2x} dx$

d) $\int_{2}^{3} \frac{x+1}{x-1} dx$

e) $\int_{0}^{1} \frac{x^2+2x+3}{x-1} dx$

f) $\int_{1}^{2} \frac{\left(\sqrt{x^3}+1\right)^2}{x} dx$

g) $\int_{0}^{\pi} \left(e^x - 2\sin x\right) dx$

h) $\int_{0}^{2} \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx$

i) $\int_{0}^{\frac{5}{6}\pi} \cos\frac{2x}{5} dx$

j) $\int_{0}^{\pi} x \sin 2x dx$ metoda per partes

Řešení:

a) $\frac{33}{2}$

b) $1-\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$

d) $1+\ln 4$

e) $\frac{3}{2}+\ln 4$

f) $1+\frac{8}{3}\sqrt{2}+\ln 2$

g) $e^{\pi}-5$

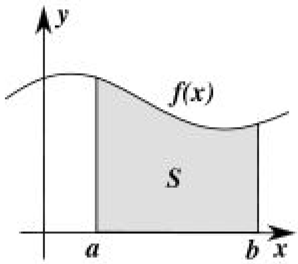
h) $e^2+\frac{1}{e^2}-2$

i) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

j) $-\frac{\pi}{2}$

Užití integrálního počtu:

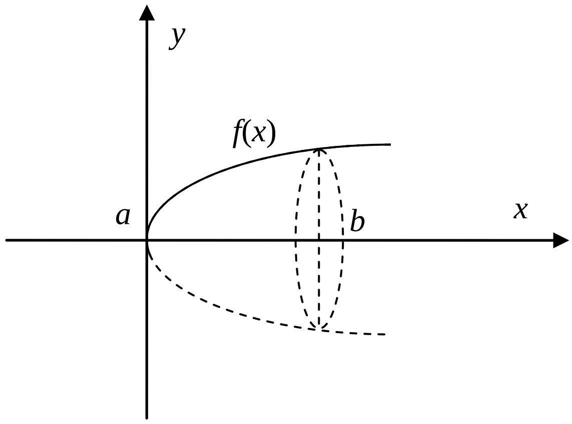
- obsah rovinného útvaru



$S = \int_a^b f(x)dx$ f na $\langle a;b\rangle$ spojitá a nezáporná, $a < b$

- objem rotačního tělesa

$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ f na $\langle a;b\rangle$ spojitá, $a < b$



4. Vypočítejte obsah plochy omezené obloukem křivky a osou x:
   a) $y = 4 - x^2$

   b) $y = 6x - x^2$

   c) $y = \sin x$

   Řešení:

   a) $\frac{32}{3}$

   b) 36

   c) 2

5. Vypočítejte obsah plochy omezené parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = 3 - 2x$.
   Řešení:

   $\frac{32}{3}$

6. Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací části křivky o rovnici $y = e^x$ kolem osy y. Křivka je omezena přímkami o rovnicích $x = 0$ a $x = 1$.
   Řešení:

   $\frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$

7. Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací části roviny kolem osy *x*. Část roviny je vymezena křivkami o rovnicích $y = 1 - x^2$ a $y = x^2$.

   Řešení:

   $$\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5