# DUM č. 11 v sadě

## 13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 05.06.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Funkce - exponenciální funkce, její vlastnosti, exponenciální rovnice, nerovnice, soustavy rovnic, sada úloh s výsledky

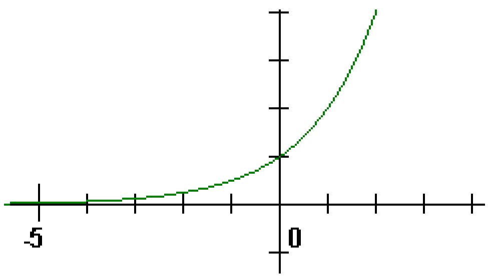
Název DUMu: **Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravdepodobnost**
Autor: Jarmila Šimečková
Datum: 17.1.2013
Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF
Anotace DUMu: Funkce - exponenciální funkce, její vlastnosti, exponenciální rovnice, nerovnice, soustavy rovnic, sada úloh s výsledky

## 11. Funkce – exponenciální funkce a rovnice

**DEF.:** Nechť *a* je kladné reálné číslo, různé od 1. **Exponenciální funkcí** o základu *a* se nazývá funkce daná rovnici $y = a^x$

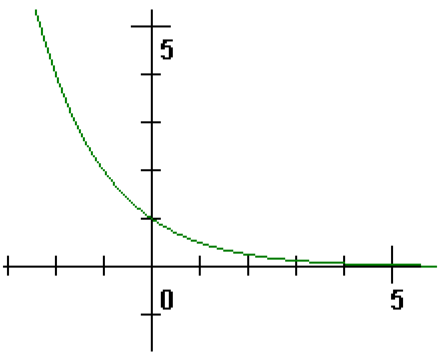
**Graf**:

1. $a \rangle 1$




funkce je rostoucí na *R*

2. $0 \langle a \langle 1$




funkce je klesající na *R*

$D_f = R$

$H_f = (0;+\infty)$

zdola omezená

$f(0) = 1$

funkce bijektivní na R

**Exponenciální rovnice**

jsou rovnice s neznámou v exponentu.

Řešení vychází z vlastnosti exponenciální funkce – je to funkce bijektivní. Z toho plyne, že pokud se rovnají hodnoty funkce, rovnají se i jejich argumenty ( v případě exponenciálních funkcí tedy exponenty).

**Metody řešení**: 1. typ – převod na stejný základ

2. typ – vytýkání

3. typ – substituce

4. typ – logaritmování

**Příklady :**

1) Určete všechny hodnoty reálného čísla q tak, aby daná exponenciální funkce byla rostoucí:

a) $y = \left(\dfrac{2q^2}{q^2+1}\right)^x$ b) $y = \left(\dfrac{1}{q}\right)^x$ c) $y = \left(\dfrac{q+3}{q-1}\right)^x$

*řešení:*

a) $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ b) $(0;1)$ c) $(1;+\infty)$

2) Určete všechny hodnoty reálného čísla *p* tak, aby daná funkce byla klesající**:**

$y = \left(\dfrac{p-1}{3p}\right)^x$ b) $y = \left(\dfrac{p+1}{p^2-1}\right)^x$

*řešení:*

a) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right) \cup (1;+\infty)$ b) $(2;+\infty)$

3) Rozhodněte, jaký vztah platí mezi reálnými čísly *r*, *s*, víte – li, že platí

a) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^r < \left(\dfrac{2}{7}\right)^s$ b) $1{,}7^r > 1{,}7^s$ c) $\left(\sqrt{2}-1\right)^r > \left(\sqrt{2}-1\right)^s$

*řešení:*

a) $r > s$ b) $r > s$ c) $r < s$

4) Rozhodněte, který ze vztahů $0 < a < 1$ a $a > 1$ platí, víte – li, že platí:

a) $a^{-0,7} > a^{-0,8}$ b) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$ c) $\frac{1}{a^3} > \frac{1}{a^2}$

*řešení:*

a) $a > 1$ b) $a > 1$ c) $0 < a < 1$

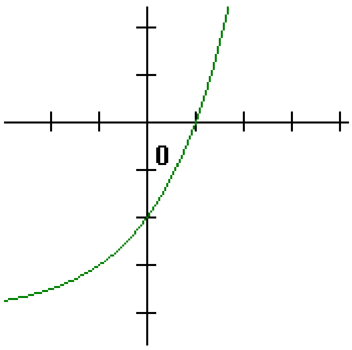
5) Načrtněte grafy funkcí:

$a)\ f_1 : y = 2^{x+1} - 4$ $b)\ f_2 : y = -\left(2^{x+1} - 4\right)$ $c)\ f_3 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4$

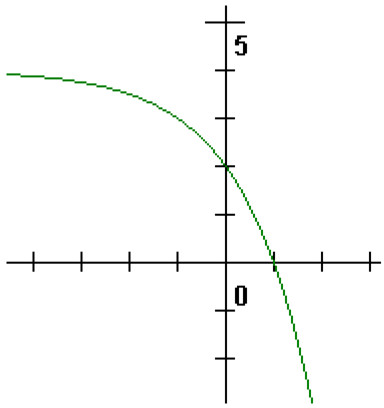
$d)\ f_4 : y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4$ $e)\ f_5 : y = 2^{-x}$ $f)\ f_5 : y = 2^{-x+1}$

*řešení:*

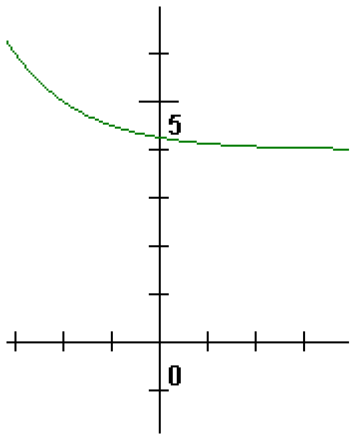
a)



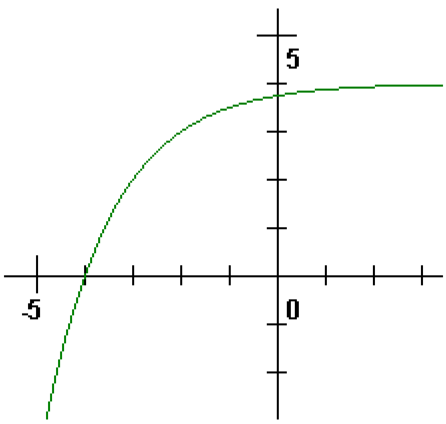

b)



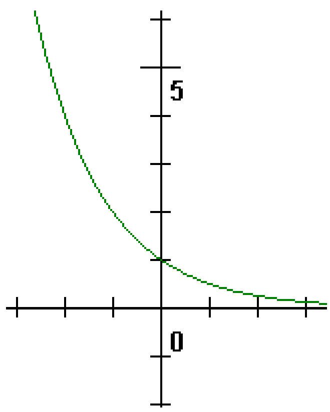

c)



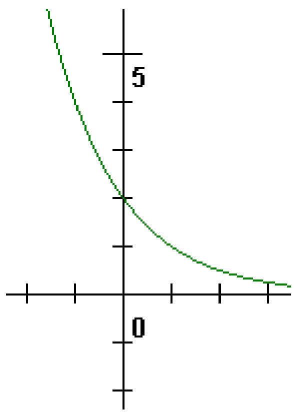

d)




e)




f)

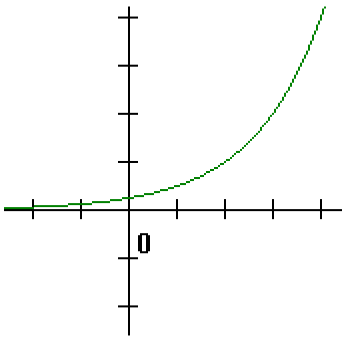


6) Načrtněte graf funkce a určete průsečíky s osami souřadnic (MZLU)

$y = 2^{x-2}$ b) $y = 3^{-x} - 1$ c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ d) $y = 3^{x+1}$

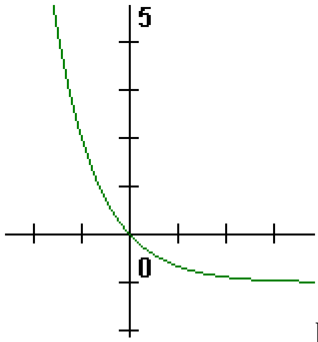
*řešení:*

a)



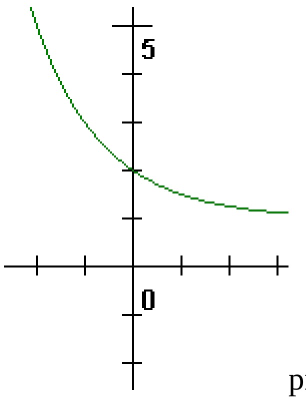

průsečík $\left[0; \frac{1}{4}\right]$

b)



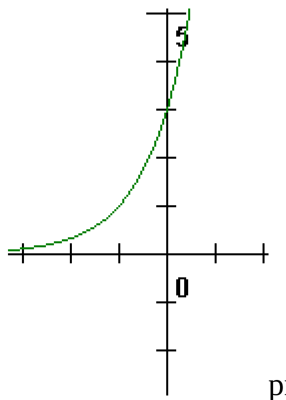

průsečík $[0;0]$

c)




průsečík $[0;2]$

d)




průsečík $[0;3]$

7) Určete definiční obor funkce (VŠE):

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-3^x}{4^x - 2}}$$

<u>*řešení:*</u> $\left[0; \frac{1}{2}\right\rangle$

8) Pro která reálná *a* je funkce rostoucí? (VŠE)

$$f(x) = \frac{(2a^2 - 5a + 2)^x}{2^x}$$

<u>*řešení:*</u> $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$

9) Určete pravdivostní hodnoty daných výroků**:** (VŠE)

$\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{5}} < \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{4}}$ b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \Rightarrow 2x > x-1$

*řešení:*
a) 0 b) 1

10) Řešte rovnice (<u>1.typ-převod na stejný základ</u>)

a) $\frac{1}{5^{2x-4}} = 125$ b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-5} = \left(\frac{5}{3}\right)^{3}$ c) $4^{(x+3)(2-5x)} = 1$

d) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$ e) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$ f) $0{,}25^{2-\sqrt{5x+1}} = 4 \cdot 2^{\sqrt{5x+1}}$

g) $\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{2x-3}} = \sqrt[6]{16}$

*řešení:*

a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = 1$ c) $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{2}{5}$ d) $x = \frac{3}{2}$ e) $x_1 = 3$, $x_2 = 9$ f) x=7 (nutná zkouška)

g) x=2

11) Řešte rovnice (<u>2.typ-vytýkání</u>)

a) $9^{x+2} + 5 \cdot 9^{x+1} = 14$ b) $3^{5x-4} + 3^{5x} = 82$ c) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$

d) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$ e) $5 \cdot 9^x - \frac{8}{3} \cdot 12^x = 3^x \cdot 4^{x+1}$

f) $2^{2x} \cdot 5^x - 2^{2x-1} \cdot 5^{x+1} = -600$

<u>*řešení:*</u>

a) x = -1 b) x = $\frac{4}{5}$ c) x = 3 d) x = 3 e) x = -1 f) x = 2

12) Řešte rovnice (<u>3.typ-substituce</u>)

a) $2^{4x} - 50 \cdot 2^{2x} = 896$ b) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ c) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6$

d) $\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 0$ e) $9 \cdot 3^x + 3^{-x} = 10$ f) $9^{x-0,5} + 9^{0,5-x} = \frac{10}{3}$

<u>*řešení:*</u>

a) x=3 b) x=2 c) $x = \frac{3}{2}$ (zk.!) d) n.ř. e) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ f) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

13) Řešte rovnice

a) $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$  b) $2^{x-1} - 2^{x-2} = 5^{x-3} + 2^{x-3}$  c) $2 \cdot 4^x + 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

d) $3^x + \dfrac{9^x}{3} = 3^{x+1} + \dfrac{9^x}{9}$

*řešení:*

a) vytkněte $3^x(1+3) = 4^x(7-4)$ pak dělte $\dfrac{3^x}{4^x} = \dfrac{3}{4}$ .......x=1  b) x=3  c) $x = \dfrac{3}{2}$

d) x=2

14) Řešte rovnice (logaritmováním)

a) $5^{x+1} = 4$  b) $2^x \cdot 3^{x-1} = 6$  c) $5^x \cdot 7^{2x} = 16^{x-1}$  d) $6 \cdot 7^{x-3} - 7^{x+2} = 82$

e) $2^x - 3^x = 2^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1}$

*řešení:*

$\log_5 \dfrac{4}{5}$ (~ -0,14)  b) $\log_6 18$~1,61  c) $\log_{\frac{16}{245}} 16$~1,02  d) $\log_7 \dfrac{2}{49}$

e) $\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{16}{3}$

15) Řešte v R: (MZLU)

a) $\dfrac{64}{25} \cdot \left(\dfrac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \left(\dfrac{125}{512}\right)^{3-x}$  b) $\dfrac{2^{x+3} \cdot 3^{x+2}}{6^{7-x} \cdot 8^{x-1}} = \dfrac{9^{x-2}}{3}$  c) $16\sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$

d) $4{,}5 \cdot 3^{5x-1} + 3^{5x+2} - \dfrac{5}{2} = 3^{5x+1}$  e) $3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2} = 405 \cdot 2^{x-1}$

f) $3 \cdot 4^x + \dfrac{9^{x+2}}{3} = 6 \cdot 4^{x+1} - \dfrac{9^{x+1}}{2}$  g) $5 \cdot 9^x - \dfrac{8}{3} \cdot 12^x = 3^x \cdot 4^{x+1}$  h) $3\left(9^{2x} + 1\right) = 9^{x+2} + 9^{x-1}$

i) $2^x \left(\dfrac{1}{8}\right)^{1-x} + 2^{1-x} \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^x = 1$

*řešení:*

a) 4; $\dfrac{2}{3}$  b) -1  c) 24  d) -0,2  e) 3  f) $-\dfrac{1}{2}$  g) -1  h) $\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}$  i) $\dfrac{1}{2}$

16) Řešte v R: (VŠE)

a) $\sqrt[2x+7]{4^{13-x}} = 1024$  b) $\sqrt[x+\frac{1}{2}]{729} = \sqrt[x-\frac{1}{2}]{9}$  c)(=15b.) $\dfrac{2^{x+3} \cdot 3^{x+2}}{6^{7-x} \cdot 8^{x-1}} = \dfrac{9^{x-2}}{3}$

d) $\dfrac{2^x \cdot 3^{x+3}}{6^{7-x} \cdot 8^{x-4}} = 9^{x-2}$  e) $\sqrt{5^{3x} + 19} - \sqrt{5^{3x} - 4} = 1$  f) $5 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2 \cdot 2^{x+1}$

g) $11^{3x-2}+13^{3x-2}=13^{3x-1}-11^{3x-1}$ h) $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdot .....\cdot 5^{2x}=0{,}04^{-28}$

i) $3\cdot 4^{-x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{2-x}=6\cdot 4^{1-x}-\frac{1}{2}\cdot 9^{1-x}$ j) $9^{\sqrt{x+2}}=27\cdot 3^{\sqrt{x+2}}$ k) $\frac{1}{3^4}\cdot\left(3^x\right)^{x+2}=\left(\sqrt{27}\right)^x\cdot\frac{\sqrt{27^x}}{9}$

l) $\sqrt{3^x}\cdot\left(3^{x-1}\right)^{x+1}=\frac{1}{\sqrt[4]{9^{x-2}}}$ m) $5^x\cdot 4^{1-x}-4^x\cdot 5^{1-x}=1$

*<u>řešení:</u>*

a) -2 b) 1 c) -1 d) 5 e) 1 f) -4 g) $\frac{2}{3}$ h) 7 i) $\frac{1}{2}$ j) 7 k) -1,2

l) -2,1 m) 1

17. (VŠE) Určete souřadnice průsečíků daných dvou funkcí:

a) $f(x)=7^{x+1}-19\quad g(x)=7^x+23$ b) $f(x)=8^{x-1}-3\quad g(x)=7\cdot 8^{x-2}+5$

c ) $f(x)=x^{2\log x+1}\quad g(x)=100\cdot x^{\log x}$ d) $f(x)=5\cdot 2^{x+2}-6\cdot 3^{x+2}\quad g(x)=3^{x+3}+2\cdot 2^{x+1}$

*<u>řešení</u>:* a) $[1;30]$ b) $[3;61]$ c) $[10;1000]$ $[0{,}01;10^6]$ d) $\left[-4;\frac{7}{12}\right]$

18.( VŠE) Určete průsečíky grafu funkce f(x) s osou x a osou y:

a) $f(x)=3\cdot 2^{3x+1}-24$ b) $f(x)=\frac{1}{6}-6^{1+2x}$ c) $f(x)=10^{x^2}-\sqrt[4]{10}$

*<u>řešení</u>:* a) $[0;-18]$ $\left[\frac{2}{3};0\right]$ b) $[-1;0]$ $\left[0;-\frac{35}{6}\right]$ c) $\left[\frac{1}{2};0\right]$ $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ $\left[0;1-\sqrt[4]{10}\right]$

19. (VŠE) V množině reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$a)\quad \begin{cases}4^{x+y}=128\\5^{3x-2y-3}=1\end{cases}$

$b)\quad \begin{cases}3\cdot 2^x+2\cdot 3^y=\frac{11}{4}\\2^x-3^y=-\frac{3}{4}\end{cases}$

$c)\quad \begin{cases}8^{2x+1}=32\cdot 2^{4y-1}\\5\cdot 5^{x-y}=\sqrt{25^{2y+1}}\end{cases}$

$d)\quad \begin{cases}3^x+3^y=12\\6^{x+y}=216\end{cases}$

$e)\quad \begin{cases}5^{x+1}-3^{1-y}=\frac{2}{3}\\5^x+3^{2-y}=\frac{6}{5}\end{cases}$

*řešení:* a) $\left[2;\ \frac{3}{2}\right]$ b) $[-2;0]$ c) $\left[\frac{3}{14};\ \frac{1}{14}\right]$ d) $[2;1]$ $[1;2]$ e) $[-1;2]$

***Literatura***:


1) Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9

2) Matematika – příklady pro přijímací zkoušky, RNDr.Petr Rádl a kolektiv, ISBN 80-7157-625-5