DUM č. 17 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 23.01.2014

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Kombinatorika - kombinace, variace, permutace, kombinační číslo, faktoriál, binimická věta: teorie, sada úloh s výsledky na procvičení.

Název DUMu: **Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravdepodobnost**
Autor: Jarmila Šimečková
Datum: 5.12.2013
Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF
Anotace DUMu: Kombinatorika - definice kombinací a variací, vlastnosti kombinačních čísel, binomická věta, soubor příkladů s výsledky na procvičení.

17.Kombinatorika

k-členná variace z n prvků (k, n є N, k ≤ n) je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchton prvků tak, že všechny prvky v ní jsou různé (neopakují se). Počet všech takových variací se značí V(k, n) a lze ho vypočítat podle vzorce:

$$V(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!}$$ (n! = n.(n-1).(n-2)….3.2.1 ; 0! = 1)

Permutace n prvků je každá n-členná variace z daných n prvků. Počet takových permutací se značí P(n) a lze ho určit podle vzorce: P(n) = n!

k-členná variace s opakováním z n prvků (k, n є N) je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být různé. Počet všech takových variací se značí V‘(k, n) a lze ho vyjádřit vzorcem: V‘(k, n) = n^k

k-členná kombinace z n prvků (k, n є N + {0}, k ≤ n) je každá množina k prvků vybraných z n daných prvků (v množině se žádné prvky neopakují). Počet všech takových kombinacá se značí K(k, n) a lze ho vyjádřit podle vzorce:

$$K(k,n)=\frac{V(k,n)}{k!}=\frac{n!}{k!(n.k)!}=\binom{n}{k}$$

k-členná kombinace s opakováním z n prvků (k, n є N) je každá neuspořádanák-tice sestavení z těchto n prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být různé (mohou se opakovat). Počet všech takových kombinací s opakováním se značí K‘(k, n) a lze ho vyjádřit vzorcem:

$$K'(k,n)=\binom{n+k-1}{k}$$

Věty o základních vlastnostech kombinačních čísel

Pro každé n, k ϵ N + {0}, k ≤ n platí vzorce (1), (2) a pro k < n vzorec (3)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n.k)!} \quad (1)$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \quad (2)$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (3)$$

Binomická věta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{(a, b ϵ C, n ϵ N)}$$

Pascalův trojúhelník

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Příklady:

1. Zjednodušte: (MZLU)

$$a)\ \frac{(n-2)!}{(n-3)!}-\frac{(n-1)!}{(n-2)!}$$

$$b)\ \frac{1}{(n-2)!}+\frac{n^2-n}{(n-1)!}$$

$$c)\ \frac{n!}{(n-1)!}+\frac{(n+1)!}{n(n-1)!}$$

$$d)\ \frac{n}{n^2-1}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$$

$$e)\ \frac{6}{n}\binom{n}{3}+\frac{6}{n}\binom{n}{2}+\frac{6}{n}\binom{n}{1}$$

$$f)\ \frac{n!}{(n-3)!}:\binom{n}{2}$$

$$g)\ \binom{n+2}{n}+\binom{n+1}{n-1}$$

$$h)\ \binom{n-1}{n-3}:\binom{n-2}{n-4}$$

$$i)\ \binom{n+1}{n}\cdot\binom{n}{n-1}$$

$$j)\ \binom{n}{n-2}:\binom{n}{n-1}$$

$$\textit{Výsledky}:\quad a)-1\quad n\geq 3\quad b)\ \frac{n+1}{(n-2)!}\quad n\geq 2$$

$$c)\ 2n+1\quad n\geq 1\quad d)\ n^2\quad n\geq 2\quad e)\ n^2+5\quad n\geq 3$$

$$f)\ 2(n-2)\quad n\geq 3\quad g)\ (n+1)^2\quad n\geq 1\quad h)\ \frac{n-1}{n-3}\quad n\geq 4$$

$$i)\ (n+1)\cdot n\quad n\geq 1\quad j)\ \frac{n-1}{2}\quad n\geq 2$$

2. (VŠE) Určeme všechna $n\in N_0$ $(N_0=N+\{0\})$, pro která platí

$$n!\geq\frac{(n+1)!}{3}$$

$\textit{Výsledek}: 0,1,2$

3. (VŠE) Určeme, pro která $n\in N$ je definován výraz $\frac{(n+2)!}{n!}-2\cdot\frac{(n+1)!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!}$ a pak ho upravme.

$\textit{Výsledek}:\quad n\geq 2;\quad 2$

4. (VŠE) Kolik existuje trojciferných přirozených čísel, jež lze zapsat pouze užitím cifer 2, 4, 6, 8? Kolik z nich má všechny cifry navzájem různé?

$\textit{Výsledky}:\quad 64;\ 24$

5. (VŠE) Kolik existuje různých šesticiferných přirozených čísel, jež lze sestavit z cifer 0,1,2,…9?

$\textit{Výsledek}:\quad 900000$

6. (VŠE) Počet variací třetí třídy bez opakování z daných prvků v poměru 21:32. Kolik je prvků?

$$\textit{Výsledek}: \quad 8$$

7. (VŠE) Zvětší-li se počet prvků dané množiny o dva, zvětší se počet permutací této množiny dvaačtyřicetkrát. Kolik prvků obsahuje tato množina?

$$\textit{Výsledek}: \quad 5$$

8. (VŠE) Upravte následují výrazy a určete, pro jaká n mají smysl:

$a)$ $\dfrac{(n+1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n+1)!}$

$b)$ $\dfrac{n^2-9}{(n+3)!} + \dfrac{6}{(n+2)!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

$c)$ $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{3}{(n+1)!} - \dfrac{n^2-4}{(n+2)!}$

Výsledky: $a)$ $\dfrac{n^2+2n}{n+1}$ $\quad n \in N_0$

$b)$ $\dfrac{1}{(n+2)!}$ $\quad n \in N_0 \cup \{-1\}$

$c)$ $0 \quad n \in N_0$

9. (VŠE) Pro která přirozená n platí:

$a)$ $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 2 \cdot \dfrac{n!}{(n-2)!} + 3!$

$b)$ $\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!} - 14n + n^2 = 17$

$c)$ $(2n+3) \cdot \dfrac{(n-2)!}{(n-3)!} - 14n = -31$

Výsledky:
$a)\ n = 4 \quad b)\ n = 1 \quad c)\ n = 5$

10. (VŠE) Pro která přirozená n platí:

$a)$ $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} - 6n \geq 12$

$b)$ $3 \cdot \dfrac{(n+2)!}{n!} - 22n \leq 2$

$c)$ $\dfrac{(n+6)!}{(n+4)!} + n^2 - 16n > 28$

Výsledky: $a)$ $\quad n \geq 3 \wedge n \in N$

$b)$ $\quad n = 1;2;3;4$

$c)$ $\quad n > 2 \wedge n \in N$

11. (VŠE) Kolik různých trojciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 1,2,3,4,5, nesmí li se žádná cifra opakovat? Kolik z nich je sudých?

Výsledky: Celkem 60, sudých 24

12. (VŠE) Počet variací čtvrté třídy z *n* prvků bez opakování je dvacetkrát větší než počet variací druhé třídy z *n* prvků bez opakování! Určete počet prvků.

Výsledek: n=7

13. (VŠE) Počet variací třetí třídy z *n* prvků bez opakování je o 225 menší než počet variací třetí třídy s opakováním vytvořených z těchto prvků. Určete počet prvků.

Výsledek: n=9

14. (VŠE) Zvětší-li se počet prvků o jeden, zvětší se počet variací třetí třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 168. Určete počet prvků.

Výsledek: n=8

15. (VŠE) Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací těchto prvků dvacetkrát. Kolik je prvků?

Výsledek: n=5

16. (VŠE) Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet permutací těchto prvků 462krát. Určete původní počet prvků.

Výsledek: n=20

17. (VŠE) Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací těchto prvků 552krát. Určete původní počet prvků.

Výsledek: n=24

18. (VŠE) Pro která přirozená *n* platí:

$$\binom{6}{5}\binom{n+1}{n-1}-\binom{6}{4}\binom{n+2}{n+1}=\binom{4}{2}$$

Výsledek: n=6

19. (VŠE) Vyjádřete jediným kombinačním číslem:

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}$$

$$\text{\textit{Výsledek}}: \quad \binom{8}{4}$$

20. (VŠE) Pro která přirozená n platí:

$$\binom{n}{2}+\binom{n+3}{n+1}+\binom{n+6}{2}\langle 93$$

$$\text{\textit{Výsledek}}: \quad n=2;3;4$$

21. (VŠE)Určeme počet prvků, je-li počet kombinací druhé třídy z těchto prvků 91.

$$\text{\textit{Výsledek}}: \quad n=14$$

22. (VŠE)Kolik rovin je určeno deseti body v E_3, jestliže:

a) žádné čtyři z nich neleží v jedné rovině.

b) pět z nich leží v jedné rovině.

Výsledky:

$$a)\binom{10}{3}=120 \quad b)\ \binom{10}{3}-\binom{5}{3}+1=111$$

23. (VŠE)Určete všechna přirozená n, pro která platí:

a) $\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}=16$ b) $\binom{n-1}{n-3}-n=8$

c) $\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-2}{n-4}=4$ d) $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}+\binom{n-2}{2}=2\cdot 2!$

e) $(n!)^2-23n!-24=0$ f) $\binom{n}{3}+\binom{n+2}{3}+\binom{n+4}{3}=\frac{n^3}{2}+88$

g) $3\binom{n-1}{n-3}-3\binom{n}{n-1}=4!$ h) $\binom{n+4}{n+2}-2\binom{n}{n-1}=8$

i) $\binom{n+1}{n-1} - 2n = \binom{5}{4}$ j) $2\binom{n+1}{n-1} + n(n-5) = 3!$

Výsledky: a) *n*=5 b) *n*=7 c) *n*=4 d)*n*=4 e) *n*=4 f) *n*=6
g) *n*=7 h) *n*=1 i) *n*=5 j) *n*=3

24. (VŠE)Určete všechna přirozená n, pro která platí:

a) $\binom{n}{2} + \binom{n+3}{2} + \binom{n+6}{2} \langle 72$

b) $2\binom{n+4}{n+2} - 4n \geq 16$

c) $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} + \binom{n-2}{2} \leq 4$

Výsledky: a) *n*=2 nebo n=3 b) $n \in N$ c) *n*=4

25. (VŠE)Kolik je prvků, jestliže počet kombinací čtvrté třídy z nich vytvořených je dvacetkrát větší než počet kombinací druhé třídy z těchto prvků.
Výsledek: *n*=18

26. (VŠE) Zmenší-li se počet prvků o jeden, zmenší se počet kombinací třetí třídy z nich vytvořených o 45. Určete původní počet prvků. *Výsledek:* *n*=11

27. (VŠE) Kolik je prvků, jestliže počet variací druhé třídy bez opakování z nich vytvořených je o 36 větší než počet kombinací druhé třídy. *Výsledek:* *n*=9

28.(VŠE) V binomickém rozvoji výrazu $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$, *x*>0 určeme

a) sedmý člen rozvoje

b) člen neobsahující *x*.

Výsledky: a) $a_7 = \frac{105}{8x^{10}}$ b) $a_3 = \frac{45}{256}$

29.(VŠE) S použitím binomické věty vypočítejte: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^5$

Výsledek: $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

30.(VŠE) Pro které reálné číslo $x>0$ je pátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)^{10}$ roven 105?

Výsledek: $x=\frac{1}{8}$

31. (VŠE) Pro která reálná čísla je sedmý člen binomického rozvoje výrazu

$\left(\sqrt[3]{4-2x}\right)+\sqrt[6]{3-2x}\ \ )^9$ roven168? *Výsledek:* x=1

32. (VŠE) Který člen mnohočlenu, vzniklého po výpočtu $\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}$ $x\neq 0$ pomocí binomické věty obsahuje x^8 ? Napište tento člen.

Výsledek: pátý, $210\cdot 3^6\cdot x^8$

33. (VŠE) V mnohočlenu, který vznikne výpočtem $\left(\frac{1}{3x}-x^3\right)^{11}$ $x\neq 0$ pomocí binomické věty, určete koeficient u x^{25}. *Výsledek:* $-\frac{55}{9}$

34. (VŠE) V binomickém rozvoji $\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^7$ $x\neq 0$ určete člen, který obsahuje x^{-1}. Vypočtěte tento člen. *Výsledek:* $a_5=35x^{-1}$

35. (VŠE) Užitím binomické věty vypočítejte $\left(1-\sqrt{3}i\right)^6$. *Výsledek:* 64

36.(VUT) V lavici mohou sedět 4 žáci. Kolikerým způsobem je možné lavici obsadit, vybírá-li učitel z pěti žáků a záleží na pořadí míst. *Výsledek:* 120

37. (VUT) Kolik různých trikolór se dá sestavit z barev modré, bílé, červené, černé, zelené a žluté, jestliže se barvy neopakují? *Výsledek:* 120

38. (VUT) Ve třídě je 25 žáků, z nichž 4 mají být zkoušeni. Kolikerým způsobem to lze provést? *Výsledek:* 12650

39. (VUT) Vypočítejte $\sum_{n=0}^{7} \binom{7}{n}$

Výsledek: 2^7

40. (VUT) Řešte rovnici pro $x \in N_0$: a) $x! = 380(x-2)!$ *Výsledky:* $x = 20$

b) $\log(x+1)! - \log x! = 1$ $x = 9$

41. (VUT) a) Kolik různých čtyřciferných čísel můžeme utvořit z číslic 3,4,5?

b) Kolik různých pětimístných kladných celých čísel lze vytvořit z číslic 2,3,5, jestliže se v každém čísle vyskytují číslice 3 a 5 právě dvakrát?

Výsledky: a) 81 b) 30

42. (VUT) Které $x \in N$ vyhovuje rovnici $\binom{x-1}{2} - \binom{x}{0} = \frac{1}{2}\binom{x}{2}$? *Výsledek:* x=5

43. (VUT) Kolik trojciferných čísel větších než 400 můžeme vytvořit z cifer 1,3,4,6, jestliže se žádná číslice v zápisu čísla neopakuje? *Výsledek:* x=12

44.(VUT)Troje dveře na chodbě mají být natřeny, každé jinou barvou. K dispozici jsou barvy bílá, žlutá, červená a zelená. Kolikerým způsobem můžeme úkol splnit? *Výsledek:* x=24

45. (VUT) Čtyři knihy české a tři slovenské mají být umístěny na poličce tak, že nejprve jsou řazeny knihy české, potom slovenské. Kolikerým způsobem můžeme takto knihy na poličce seřadit? *Výsledek:* x=144

46. (VUT) Za skupinu 10 žáků a 18 žákyň má být vybrána delegace, v níž mají být 2 žáci a 2 žákyně. Kolik je možností vytvořit takovouto delegaci? *Výsledek:* x=6885

47. (VUT) V lavici sedí 5 žáků. Kolikerým způsobem je může učitel přesadit?

Výsledek: x=120

48. V cukrárně mají 5 druhů dortů v dostatečném množství. Kolika způsoby si můžeme koupit 8 dortů?

Výsledek: x=495

49. V prodejně mají výběr 12ti různých pohledů. Určete, kolika způsoby si lze z nich koupit a) 15 pohledů b) 7 pohledů c) 7 různých pohledů

Výsledky: a) 7726160 b) 31824 c) 792

<u>Literatura</u>:

1) Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9
2) Matematika – příklady pro přijímací zkoušky, RNDr.Petr Rádl a kolektiv, ISBN 80-7157-625-5