DUM č. 10 v sadě

14. Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komlexní čísla

Autor: Magda Krejčová

Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Analytická geometrie v rovině: definice, odchylky, vzdálenosti, vzájemné polohy.

Analytická geometrie v rovině:

definice, odchylky, vzdálenosti, vzájemné polohy

Vektor je množina souhlasně orientovaných úseček téže velikosti.

Každá z těchto úseček je jeho umístění. Vektor je zadán velikostí, směrem, orientací.

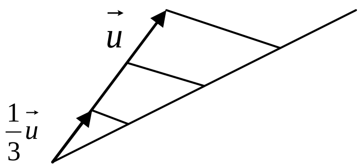
Pokud $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, pak $\vec{u}\left(x_B - x_A;\, y_B - y_A\right)$.

Délka vektoru $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |AB| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

Operace s vektory:

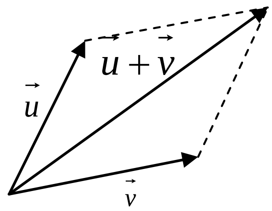
1) násobení racionálním číslem

$$\vec{u}\left(u_1; u_2\right)$$
$$\frac{1}{3}\vec{u}\left(\frac{1}{3}u_1; \frac{1}{3}u_2\right)$$



2) sčítání vektorů

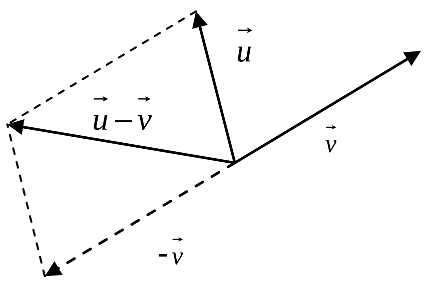
$$\vec{u}\left(u_1; u_2\right); \vec{v}\left(v_1; v_2\right)$$
$$\vec{u} + \vec{v}\left(u_1 + v_1; u_2 + v_2\right)$$



pro sčítání vektorů platí $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

3) rozdíl vektorů

$$\vec{u} - \vec{v}\left(u_1 - v_1; u_2 - v_2\right)$$



4) skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\varphi$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Přímka

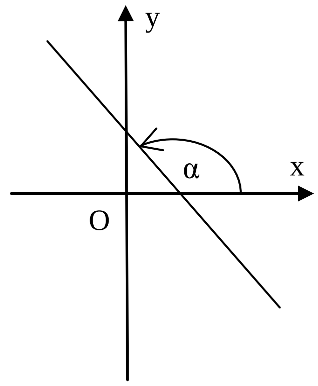
1) Obecná rovnice přímky: $ax + by + c = 0$

   (směrový vektor $\vec{u}$ (- b; a), normálový vektor $\vec{n}$ (a; b))

   $\vec{u} \parallel p$ $\qquad\qquad$ $\vec{u} \perp p$

2) Směrnicová rovnice přímky: $y = px + q$

   p...směrnice přímky, tangens úhlu, který svírá přímka s kladným směrem osy x



3) parametrická rovnice přímky: $X = A + t \cdot \vec{u}$

   procházející bodem $A(x_A; y_A)$ a rovnoběžná s vektorem $\vec{u}$ (u_1; u_2)

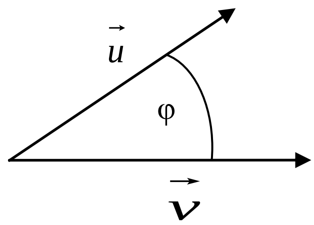
   tedy: $\begin{cases} x = x_A + t \cdot \overrightarrow{u_1} \\ y = y_A + t \cdot \overrightarrow{u_2} \end{cases}$ $\quad t \in \boldsymbol{R}$ (pro polopřímku $t \in \langle 0; +\infty)$, pro úsečku $t \in \langle 0; 1 \rangle$)

Střed úsečky

$$S = \frac{A + B}{2} \quad \text{tedy} \quad S\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Úhel φ nenulových vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$:

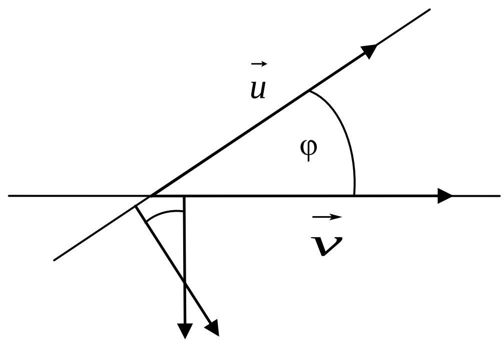
$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



Úhel φ nenulových přímek:

($\vec{u}$; $\vec{v}$ jsou buď směrové nebo normálové vektory)

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



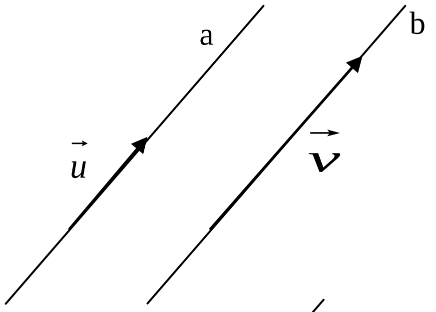
Vzájemná poloha 2 přímek:

1. rovnoběžné přímky (rovnoběžky) $a \parallel b$

   $\vec{u} = k\vec{v} \qquad k \in R$

   $a \wedge b = \phi$

   (směrnicové nebo normálové vektory jsou kolineární, žádný společný bod)

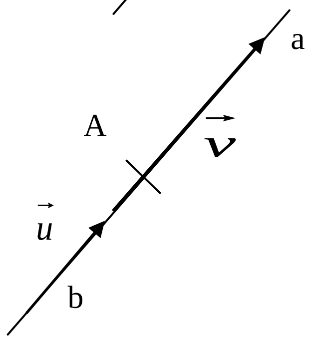


2. totožné přímky $a \equiv b$

   $\vec{u} = k\vec{v} \qquad k \in R$

   $A \in a \wedge A \in b$

   (směrové nebo normálové vektory jsou kolineární, nekonečně mnoho společných bodů)

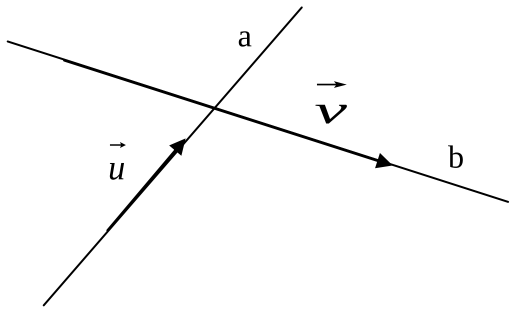


3. různoběžné přímky (různoběžky)

   $a \nparallel b$

   $\vec{u} \neq k\vec{v}$

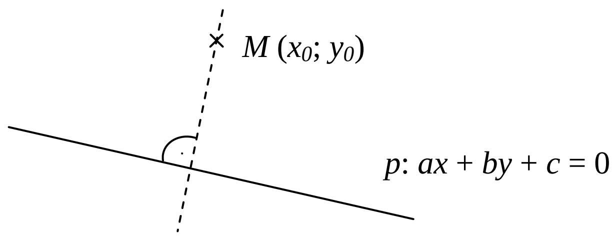
   (směrové nebo normálové vektory nejsou kolineární, existuje 1 společné řešení)



Vzdálenost bodu *M* od přímky *p*:

V rovině nazýváme vzdálenost bodu *M* od paty kolmice vedené bodem *M* k přímce *p*.

$$v(A; p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



1. Určete vektor $\vec{u}(u_1; u_2)$ tak,aby platilo $3\vec{u} + 4\vec{v} = 5\vec{w}$,je-li $\vec{v}(5; -7)$, $\vec{w}(+; -2)$.
   $\vec{u}(-5; 6)$

   VŠE

2. Najdete vektor $\vec{v}$ tak,aby s vektorem $\vec{u}(2; -1)$ byly navzájem kolmé.
   každý vektor, který je kolineární s $\vec{v}(1; 2)$

   VŠE

3. Dokažte, že trojúhelník *KLM*, kde $K[4; 3]$, *L*[12; 9], *M*[1; 7] je pravoúhlý.
   VŠE

   $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$

4. Dokažte,že čtyřúhelník *KLMN*, kde *K*[1; 3], *L*[-1; 9], *M*[-2, -4], *N*[0; -10] je rovnoběžník.
   VŠE

   $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$

5. V rovině E_2 jsou dány body *K*[2; -2], *L*[-1; 0], *M*[0; 3].Určete bod $N \in E_2$ tak, aby čtyřúhelník *KLMN* byl rovnoběžník.
   VŠE

   N[3; 1]

6. V rovině E_2 najděte bod, který má od bodů *A*[4; -1], B[7; 2], C[-2; 11] stejnou vzdálenost.
   VŠE

   X[1; 5]

7. Body *A*[1; 2] a *B*[4; 0] jsou dva sousední vrcholy rovnoběžníku v E_2, jehož střed je v bodě *S*[2; 2]. Najděte souřadnice zbývajících dvou vrcholů.
   VŠE

   C[5; 2], *D*[0; 4]

8. Na ose x najděte bod, který má stejnou vzdálenost od počátku jako od bodu A[-3; 6].
VŠE

X[-7,5; 0]

9. Najděte bod v E_2, který má stejnou vzdálenost od obou souřadnicových os a od bodu A[2; 4].

VŠE

X[10; 10], Y[2; 2]

10. Čtverec se středem v počátku soustavy souřadnic má jeden vrchol v bodě A[4; 3]. Vypočítejte:
a) obsah čtverce

b) poloměr kružnice opsané.

VŠE

a) $S = 50$

b) $r = 5$

11. Vypočítejte obsah kruhu vepsaného a opsaného čtverci, jehož střed je bod S a jeden z vrcholů bod A, je-li:
a) S[1,1], A[4; 5]

b) S[-1,-3], A[4; 9]

c) S[1,2], A[5; -1]

d) S[-2,-1], A[1; -5]

VŠE

a) $S_V = \dfrac{25}{2}\pi \quad S_O = 25\pi$

b) $S_V = \dfrac{169}{2}\pi \quad S_O = 169\pi$

c) $S_V = \dfrac{25}{2}\pi \quad S_O = 25\pi$

d) $S_V = \dfrac{25}{2}\pi \quad S_O = 25\pi$

12. Napište parametrické, obecnou i směrnicovou rovnici přímky v rovině E_2, která je určena body $A[2; -3]$, $B[0; 1]$.
VŠE

$x = 2 + t; y = -3 - 2t;\ t \in R$

$2x + y - 1 = 0$

$y = -2x + 1$

13. Napište obecnou rovnici přímky v E_2, která prochází středem úsečky AB; $A[3; 1]$, $B[-1; 5]$ a je kolmá na úsečku AB.
VŠE

$x - y + 2 = 0$

14. V rovině E_2 určete souřadnice vrcholů trojúhelníků (pokud existuje), jehož strany leží na přímkách daných rovnicemi: $x - y + 1 = 0$; $2x - 3y + 7 = 0$; $x - 2y + 4 = 0$.
VŠE

$A[4; 5]$, $B[-2; 1]$, $C[2; 3]$

15. Napište parametrické a obecnou rovnici přímky v E_2, která prochází bodem $A[0; -4]$ a je kolmá k přímce spojující body $B[-5; 0]$ a $C[-1; 8]$.
VŠE

$x + 2y + 8 = 0$

16. Spočtěte vzdálenost bodu $A[4; 3]$ od přímky dané parametrickými rovnicemi $x = 1 - t$, $y = 2 + t$, $t \in R$.
$2\sqrt{2}$

17. Vypočítejte obsah trojúhelníku, který tvoří přímka o rovnici $3x - 4y - 12 = 0$ a souřadné osy.
$S = 6$

18. Přímka v E_2 je dána rovnicí $2x - 3x + 5 = 0$. Určete neznámé souřadnice bodů $A[-1; a]$, $B[b; 0]$ a $C[2; c]$ dané přímky.
VŠE

$a = 1,\ b = -5/2,\ c = 3$

19. Určete reálná čísla p, q tak, aby rovnice $2x + (1 + 2q)y - 2p - q = 0$ a $-x - (3q + 4p)y + 6p + q = 0$ vyjadřovaly tutéž přímku.

VŠE

$p = 1$, $q = 2$

20. Určete obecnou rovnici přímky v E_2, která je dána body $A[6; 2]$, $B[-3; 4]$. Dále určete souřadnice průsečíků této přímky se souřadnými osami. Tyto dva body tvoří s počátkem souřadnic trojúhelník. Jeho obsah vypočtěte.

VŠE

$2x + 9y - 30 = 0$, $X[15; 0]$, $Y[0; \frac{10}{3}]$, $S = 25$

21. Určete obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A[1; 3]$ a průsečíkem přímek daných rovnicemi $3x + 4y - 1 = 0$ a $2x + y - 4 = 0$.

VŠE

$5x + 2y - 11 = 0$

22. Napište rovnici přímky v E_2, která prochází středem úsečky AB, kde $A[3;]$, $B[1; 2]$ a je rovnoběžná s přímkou danou rovnicí $x - 2y + 10 = 0$.

VŠE

$x - 2y + 6 = 0$

23. Určete parametr c v rovnici přímky $2x + y + c = 0$ tak, aby tato přímka a přímky o rovnicích $3x + 4y + 1 = 0$ a $x - y - 2 = 0$ se protínaly v jednom bodě.

VŠE

$c = -1$

24. Určete všechny hodnoty parametru m tak, aby přímky dané rovnicemi $mx + 2y - 7 = 0$ a
$x + \sqrt{3}y - 3 = 0$ byly rovnoběžné. Dále určete velikost úhlu, který tyto přímky svírají s kladnou poloosou x.

VŠE

$m = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad d = \frac{5}{6}\pi$

25. Úsečka AB má krajní body $A[1; 3]$ a $B[-4; 1]$. Určete rovnici přímky, která prochází středem úsečky AB a průsečíkem přímek daných rovnicemi $2x - y + 4 = 0$ a $3x + 5y - 7 = 0$.
VŠE

$y = 2$

26. Určete obsah trojúhelníku omezeného přímkami o rovnicích $x - y - 3 = 0$, $2x - y - 12 = 0$ a osou x.
VŠE

$S = 9$

27. Trojúhelník má vrcholy $A[4; -2]$, $B[2; 2]$, $C[-3; -1]$. Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží strany a těžnice tohoto trojúhelníku.
VŠE

AB: $2x + y - 6 = 0$ $\quad$ t_a: $5x + 9y - 2 = 0$

BC: $3x - 5y + 4 = 0$ $\quad$ t_b: $7x - 3y - 8 = 0$

AC: $x + 7y + 10 = 0$ $\quad$ t_c: $x - 6y - 3 = 0$

28. Určete reálný parametr a tak, aby přímky AB a AC byly kolmé, je-li A$[-1; 2]$, $B[a; 3]$, $C[1; -4]$.

VŠE

$a = 2$

29. Určete parametrickou a obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A[2; -1]$ a je kolmá k přímce o rovnici $2x - y + 4 = 0$.
VŠE

$x = 2 + 2t$; $y = -1 - t$ $\qquad$ $x + 2y = 0$

30. Trojúhelník ABC má vrcholy $A[-1; 0]$, $B[6; -3]$, $C[2; 5]$. Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží výšky tohoto trojúhelníku.
VŠE

$v_a : x - 2y + 1 = 0$

$v_b : 3x + 5y - 3 = 0$

$v_c : 7x - 3y + 1 = 0$

31. Které body v E_2, ležící na přímce p, mají od počátku vzdálenost d? Vypočítejte souřadnice těchto bodů, znázorněte graficky.

a) p: $4x + 3y - 5 = 0$ $d = 1$

b) p: $-x + 2y - 5 = 0$ $d = \sqrt{10}$

c) p: $3x + 5y + 9 = 0$ $d = 1$

VŠE

a) $X\left[\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right]$

b) $X_1[-3; 1]$; $X_2[1; 3]$

c) takové body neexistují

32. Určete vzájemnou polohu dvojic přímek p, q, je-li:

a) p: $x + 2y - 3 = 0$ q: $x = 7 - 2t$; $y = -1 + t$

b) p: $2x - 3y + 4 = 0$ q: $3x + 4y - 11 = 0$

c) p: $x = 2 - t$; $y = 1 + 3t$ q: $x = -1 + u$; $y = 10 - 3u$

VŠE

a) rovnoběžné různé

b) různoběžné s průsečíkem $P[1; 2]$

c) *totožné*

33. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou $p = KL$. $A[2; -3]$, $K[-1; -1]$, $L[-2; 1]$.
MZLU

$2x + y - 1 = 0$

34. Napište obecnou rovnici osy úsečky AB; $A[7; -3]$, $B[-3; 1]$.
MZLU

$5x - 2y - 12 = 0$

35. Určete vzájemnou polohu přímek p, q. U rovnoběžek vypočítejte jejich vzdálenost v, u různoběžek souřadnice jejich průsečíku P.

a) p: $5x + 2y - 11 = 0$ $\quad$ q: $x = 3 - 2t$

b) p: $2x - 5y + 2 = 0$ $\quad$ q: $5x + 2y + 5 = 0$

c) p: $2x + 3y - 5 = 0$ $\quad$ q: $y = -\frac{2}{3}$; $x = -\frac{5}{3}$

d) p: $2x - 5y + 7 = 0$ $\quad$ q: $8x + 15y + 7 = 0$

MZLU

a) totožné

b) různoběžné $P[-1;0]$

c) rovnoběžné $v = \frac{10}{\sqrt{3}}$

d) různoběžné $P\left[-2;\frac{3}{5}\right]$

36. Určete odchylku přímek AB a CD, kde $A[2; 4]$, $B[4; 5]$, $C[3; 4]$, $D[4; 7]$.
VUT

$\frac{\pi}{4}$

37. Určete velikost výšky v_c trojúhelníku ABC, $A[2; 3]$, $B[6; -1]$, $C[5; 3]$.
VUT

$\frac{3}{2}\sqrt{2}$

38. Určete směrnici přímky $bx + cy - m = 0$.
VUT

$k = -\frac{b}{c}; c \neq 0$

39. V rovině jsou dány body $A[-2; 5]$, $B[0; b]$, $C[-3; 5]$, $D[7; 0]$.
a) Určete číslo $b \in R$ tak, aby byly přímky AB a CD na sebe kolmé.

b) Určete číslo $b \in R$ tak, aby byly přímky AB a CD rovnoběžné.

VUT

a) b = 9

b) b = 4

40. Určete, zda přímka p: $x + 2y - 7 = 0$ protíná úsečku AB. $A[1; 1]$, $B[5; 3]$.
VUT

Ano, v bodě $C[3; 2]$

41. Je dán vektor $\vec{u}\left(\sqrt{3}; -1\right)$. Určete souřadnice vektoru $\vec{v}$, který svírá s vektorem $\vec{u}$ úhel 60° a jehož velikost je 4.
$\vec{v_1}(0; -4)$; $\vec{v_2}\left(2\sqrt{3}; 2\right)$

42. Je dán vektor $\vec{u}(4; 9)$. Určete $m \in R$ tak, aby vektor $\vec{v}(m; 2)$ byl kolmý k vektoru $\vec{u}$.
$m = -\dfrac{9}{2}$

Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5