Devoir 7:

Equation du cercle

Forme canonique(středový tvar)

Un cercle de centre $S(x_S; y_S)$ et de rayon r a une équation de forme canonique

$$(x - x_S)^2 + \left(y - y_S\right)^2 = r^2$$

Par exemple:

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$$

Alors c´est l´équation canonique du cercle de centre $S(3; 5)$ et de rayon 2. Si on développe cette équation on obtient $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 4$ et puis

$$x^2 - 6x + y^2 - 10y - 30 = 0$$

Cette équation-là on appelle forme cartésienne(obecný tvar rovnice kružnice).

Ex.: Déterminer l´équation canonique puis cartésienne du cercle de centre $S(-1; 2)$ et de rayon 3.

corrigé: on utilise la forme

$(x - x_S)^2 + \left(y - y_S\right)^2 = r^2$ et on remplace ce qui est donné dans l´énoncé. On obtient

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ ...équation canonique

Puis on développe: $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$ et finalement

$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$ ...équation cartésienne

Ex.1: Déterminer l´équation canonique puis cartésienne du cercle de centre $S(-3; -7)$ et de rayon 4.

Résultats: $(x + 3)^2 + (y + 7)^2 = 16, \quad x^2 + 6x + y^2 + 14y + 42 = 0$

Ex.: Reécrire une équation cartésienne du cercle sous la forme canonique, puis déterminer les coordonnées du centre et le rayon:

$4x^2 - 4x + 4y^2 - 24y + 25 = 0$

Corrigé: On va utiliser une méthode appelée en tchèque „doplnění na čtverec“:

$4\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 4(y^2 - 6y + 9 - 9) + 25 = 0$

$4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{4}{4} + 4(y^2 - 6y + 9) - 4 \cdot 9 + 25 = 0$

$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4(y - 3)^2 - 1 - 36 + 25 = 0$ et puis $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4(y - 3)^2 = 12$ /:4

résultat: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = 3, \quad S\left(\frac{1}{2}; 3\right) \quad r = \sqrt{3}$

Ex.2: .: Reécrire une équation cartésienne du cercle sous la forme canonique, puis déterminer les coordonnées du centre et le rayon:

1) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$
2) $4x^2 - 8x + 4y^2 - 4y + 2 = 0$
3) $9x^2 + 6x + 9y^2 - 18y + 5 = 0$
4) $x^2 - 16x + y^2 - 6y + 57 = 0$

résultats:

1) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1 \quad S(1; -2) \quad r = 1$
2) $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad S\left(1; \frac{1}{2}\right) \quad r = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{9} \quad S\left(-\frac{1}{3}; 1\right) \quad r = \frac{\sqrt{5}}{3}$
4) $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 16 \quad S(8; 3) \quad r = 4$

Ex.3: Pourquoi l´équation $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 14 = 0$ ne représente pas de cercle?

résultat: En utilisant la méthode précédente on obtient $(x+2)^2+(y-3)^2=-1$ mais r^2 ne peut pas être négatif.