$\boxed{\text{CORRIGÉ EX1}}$ TC1 4/5 2019/20

$f(x) = \dfrac{x^2+5x+3}{x-1}$ $I = [-8;1[ \cup ]1;8]$ $C$ la courbe, un. gr. 1cm

1, a, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\overbrace{x^2+5x+3}^{\to 9}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\overbrace{x^2+5x+3}^{\to 9}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^+}} = +\infty$

b, Comme $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ alors on peut déduire que $(C)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2, $f'(x)$ $f$ est une fc. rationnelle $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

$f'(x) = \dfrac{(2x+5)(x-1) - (x^2+5x+3)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-2x+5x-5-x^2-5x-3}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0$ pour $x \in \{4; -2; 1\}$

tableau de signe de $f'(x)$

| $x$ | $-8$ | | $-2$ | | $1$ | | $4$ | | $+8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-4$ | | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-1)^2$ | | $+$ | | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | ‖ | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-3$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $13$ | $\nearrow$ | $\frac{107}{7}$ |

$f(-8) = \dfrac{(-8)^2+5\cdot(-8)+3}{-8-1} = \dfrac{64-40+3}{-9} =$
$= -3$

$f(-2) = \dfrac{(-2)^2+5\cdot(-2)+3}{-2-1} = \dfrac{4-10+3}{-3} =$
$= 1$

$f(4) = \dfrac{4^2+5\cdot4+3}{4-1} = \dfrac{16+20+3}{3} = 13$

$f(8) = \dfrac{8^2+5\cdot8+3}{8-1} = \dfrac{64+40+3}{7} = \dfrac{107}{7}$

3, a, $H(4; y_H)$ $y_H = \dfrac{4^2+5\cdot4+3}{4-1} = 13$

$H(4; 13)$ $f'(4) = 0$

$(h)$: $y = f'(4)(x_H - 4) + y_H$

$= 0(x-4) + 13$

$\underline{(h):\ y = 13}$

b, $T(-1; y_T)$ $y_T = \dfrac{(-1)^2+5\cdot(-1)+3}{-1-1} = \dfrac{1-5+3}{-2} = \dfrac{1}{2}$

$f'(-1) = \dfrac{(-1-4)(-1+2)}{(-1-1)^2} =$
$= \dfrac{-5\cdot1}{(-2)^2} = -\dfrac{5}{4}$

$(t)$: $y = f'(-1)(x+1) + \dfrac{1}{2}$

$(t)$: $y = -\dfrac{5}{4}(x+1) + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{4}x - \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2} = \underline{-\dfrac{5}{4}x - \dfrac{3}{4}}$

4)

| $x$ | $-8$ | $-7$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1.$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | $-2{,}1$ | $-1{,}3$ | $-0{,}5$ | $0{,}2$ | $0{,}8$ | $1$ | $0{,}5$ | $-3$ | $\varnothing$ | $17$ | $13{,}5$ | $13$ | $13{,}3$ | $13{,}8$ | $14{,}5$ | $15{,}3$ |

5) les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

$P_x(\,?\,;\,0)$ $\quad y=0 \quad$ $(D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\})$

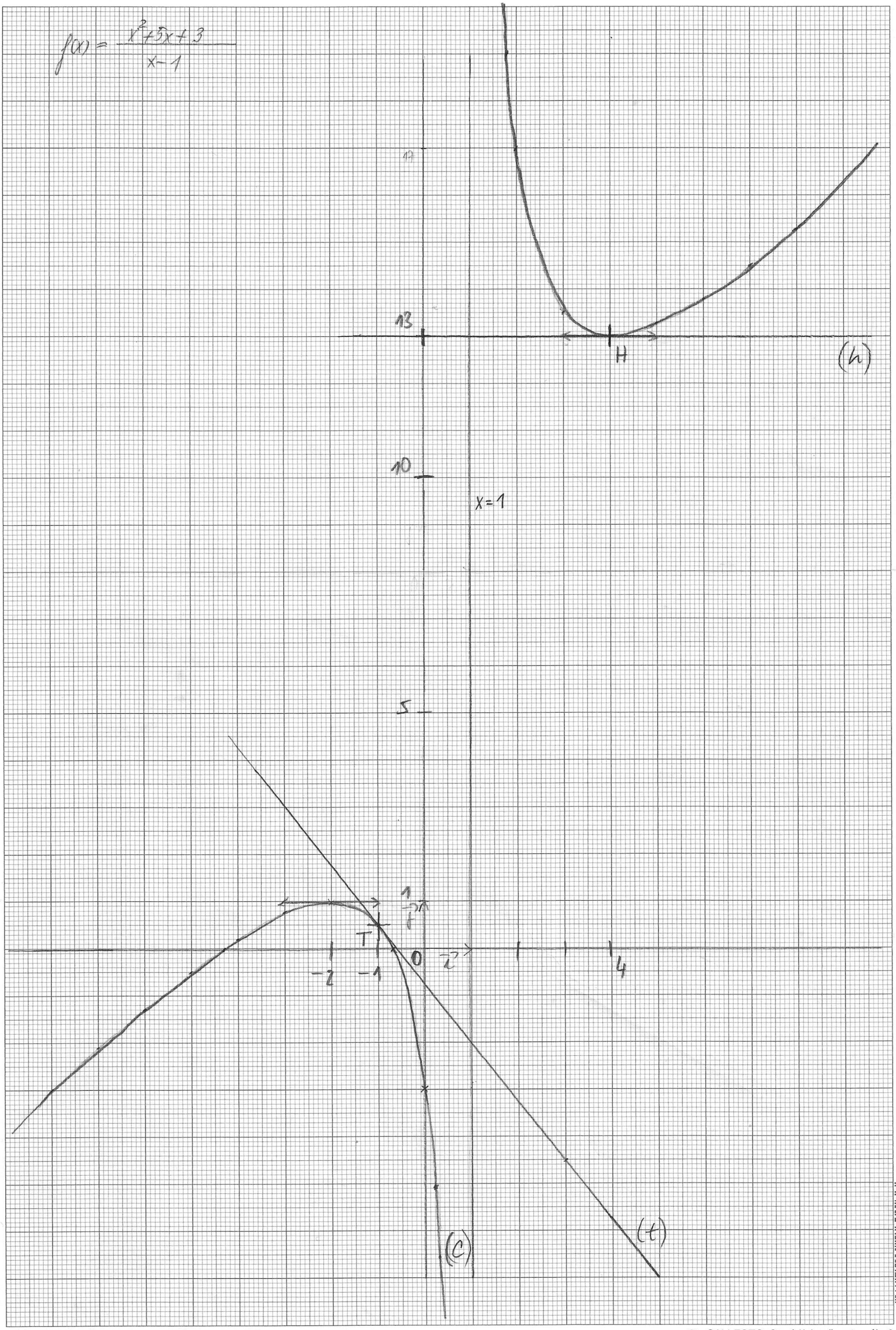
$$\frac{x^2+5x+3}{x-1} = 0 \iff x^2+5x+3 = 0 \quad \text{sur } D_f$$

$$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4.1.3 = 25-12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$P_{x_1}\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\,;\,0\right) \qquad P_{x_2}\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\,;\,0\right)$$

$$f(x) = \frac{x^2+5x+3}{x-1}$$



LIMITES

1, a, $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-3x+2} \overset{\text{FI } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x+5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{x-1} = \frac{2+5}{2-1} = \underline{\underline{7}}$

b, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$: $\frac{x^2+3x-10}{x^2-3x+2} = \frac{(x+5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = \frac{x+5}{x-1}$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+5}{x-1} = -\infty$ ($x+5 \to 6$, $x-1 \to 0^-$)

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+5}{x-1} = +\infty$ ($x+5 \to 6$, $x-1 \to 0^+$)

la limite n'existe pas $x\to 1$

$C_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$

c, $\lim_{x\to -5} \frac{x^2+3x-10}{x^2-3x+2} = \frac{(-5)^2+3\cdot(-5)-10}{(-5)^2-3\cdot(-5)+2} = \frac{25-15-10}{25+15+2} = \underline{\underline{0}}$

**Exercice 3** TC 1 4/5 2019/20

## Partie A

a) $(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x - 10 = 0$

substitution $\log_2 x = y$ condit. $x > 0$

$y^2 + 3y - 10 = 0$

$(y+5)(y-2) = 0$

$y = -5$

$\log_2 x = -5$

$x = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

$y = 2$

$\log_2 x = 2$

$x = 2^2 = 4$

$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{32} ; 4 \right\}$

b) $\log(x-2) - \log(4-x) = 1 - \log(13-x)$ car $\log 10 = 1$

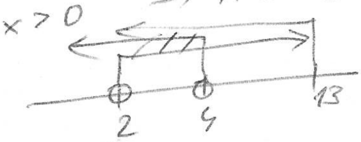
$\log \frac{x-2}{4-x} = \log \frac{10}{13-x}$

conditions:

$x-2 > 0 \rightarrow x > 2$

$4-x > 0 \rightarrow x < 4$

$13-x > 0 \rightarrow x < 13$




$D_f = ]2;4[$

$\frac{x-2}{4-x} = \frac{10}{13-x}$

$(x-2)(13-x) = 10(4-x)$

$13x - x^2 - 26 + 2x = 40 - 10x$

$-x^2 + 25x - 66 = 0$ $66 = 3 \cdot 22$

$x^2 - 25x + 66 = 0$

$(x-3)(x-22) = 0$

$x = 3 \in D_f$

$x = 22 \notin D_f$

$\mathcal{S} = \{3\}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} > \frac{9}{2}$ $D_f$: $x \in \mathbb{R}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \frac{9}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1 + \frac{1}{8}\right) > \frac{9}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{9}{8} > \frac{9}{2}$ $/ \cdot \frac{8}{9}$

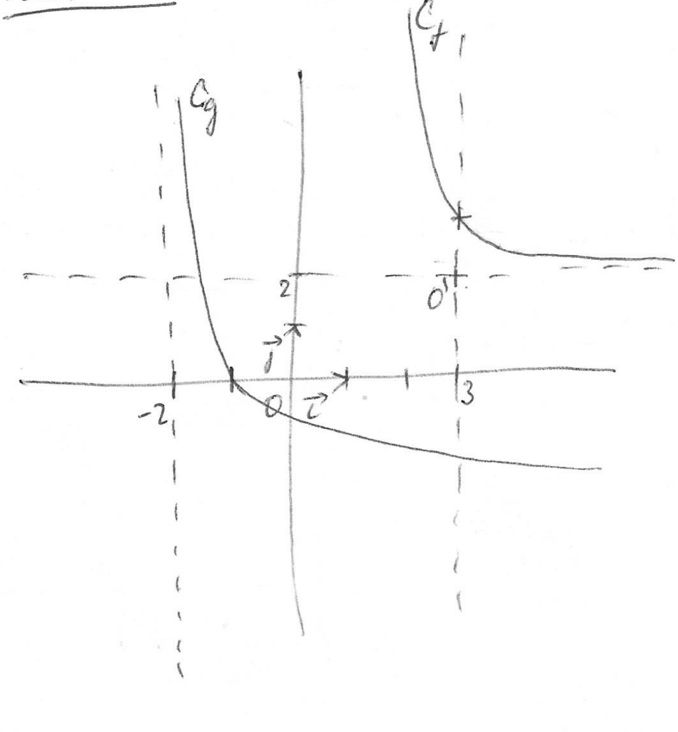
$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$ $/ \log_{\frac{1}{2}} y$ qui est décroissante

$x < \log_{\frac{1}{2}} 4$

$x < -2$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

$\mathcal{S} = ]-\infty ; -2[$

## Partie B



Ex 4   TC 1 4/5 2019/20

salle ... 500 places

dépenses ... 12 000 Kč

si $p = 100$ Kč $\Rightarrow$ tous les billets vendus

$p = 100 + x$ Kč $\Rightarrow$ le nombre de billets vendu $500 - 2x$

soit $b$... prix du billet, $c$... somme ~~vendu~~ obtenue, alors $p$ = $c - 12\,000$
profit

si $b = 100$ $\Rightarrow$ $c = 500 \cdot 100 = 50\,000$ $\Rightarrow$ $p = 50\,000 - 12\,000 =$
$= 38\,000$

si $b = 100 + x$ $\Rightarrow$ $c = (500 - 2x)(100 + x)$ $\Rightarrow$ $p = (500 - 2x)(100 + x) - 12\,000$

1, $f(x)$  $D_f = [0; 250]$

$p(x) = (500 - 2x)(100 + x) - 12\,000$

$= 50\,000 + 500x - 200x - 2x^2 - 12\,000$

$= -2x^2 + 300x + 38\,000$

2, $p'(x) = -4x + 300$

3, $p'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 300 = 0 \Leftrightarrow 4x = 300 \Leftrightarrow x = 75$

| | 0 | | 75 | | 250 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $p(x)$ | 38 000 | $\nearrow$ | 49 250 | $\searrow$ | −12 000 |

$p(0) = 38\,000$

$p(75) = -2 \cdot 75^2 + 300 \cdot 75 + 38\,000$
$= 49\,250$

$p(250) = -12\,000$

4, $p(x)$ atteint son maximum en $x = 75$ et la valeur du maximum est 49 250.

5, Si le prix du billet est de $100 + 75 = 175$ Kč alors le profit est maximal.

Si le prix est 100 Kč par billet, le profit est de 38 000 Kč.

Si −//− 175 Kč −//−, le profit est de 49 250 Kč.

Alors on gagne 11 250 Kč de plus.